

# Mestrado em Matemática e Aplicações

Dissertação para obtenção do Grau de  
Mestre em Matemática e Aplicações

Especialização em Matemática

*Transformações de Möbius e Grupo de Lorentz*

*Mário Eduino Pina Dos Santos Lopes*

Praia, Fevereiro de 2020

# Mestrado em Matemática e Aplicações

Dissertação para obtenção do Grau de  
Mestre em Matemática e Aplicações

Especialização em Matemática

## *Transformações de Möbius e Grupo de Lorentz*

*Mário Eduino Pina Dos Santos Lopes*

Dissertação apresentada à Universidade de Cabo Verde para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática e Aplicações, realizada sob a orientação científica da *Prof. Doutora Natália Bebiano da Providência*, Professora Catedrática na Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra, Portugal.

Praia, Fevereiro de 2020

## Transformações de Möbius e Grupo de Lorentz

Copyright © Mário Eduino Pina Dos Santos Lopes, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade de Cabo Verde

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade de Cabo Verde têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel e/ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objectivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.

*Que outrem possa louvar esforço alheio;  
Cousa é que se costuma e se deseja;  
Mas louvar os meus próprios, arreceio  
Que louvor tão suspeito mal me esteja;  
E, para dizer tudo, temo e creio  
Que qualquer longo tempo curto seja;  
Mas, pois o mandas, tudo se te deve;  
Irei contra o que devo e serei breve.*

L. Camões “Os Lusíadas”, Canto III.

## **Dedicatória**

À minha esposa, Elisângela dos Santos e aos meus filhos Ellon Correia Lopes e Ellen Lopes, com o meu apreço pelo apoio, compreensão e amor.

**O júri :**

**Presidente**

---

**Arguente**

---

**Orientadora**

*Prof. Doutora Natália Bebiano da Providência, Professora Cate-  
drática na Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade  
de Coimbra, Portugal.*

**Co-orientador**

*Prof. Doutor Paulino Lima Fortes, Faculdade de Ciências e Tec-  
nologia, Universidade de Cabo Verde, Cabo Verde.*

## **Agradecimentos**

Em primeiro lugar, queria expressar um profundo agradecimento a minha orientadora Professora Doutora Natália Isabel Quadros Bebiano Pinheiro da Providência, pela entrega profissional, pelas palavras sábias e sempre motivadoras e pela revisão muito cuidadosa do trabalho, formulando críticas e sugestões sempre válidas e da maior utilidade.

Um agradecimento especial é devido ao meu co-orientador, Professor Doutor Paulino Lima Fortes, pelo tempo disponibilizado para esclarecimentos e sugestões.

Registo meu cordial agradecimento aos meus colegas e professores do curso de Mestrado em Matemática e Aplicações, pela convivência e aprendizado.

À minha família, a quem são devidas agradecimentos especiais, pelo elevado espírito de sacrifício: minha esposa Elisângela dos Santos e os meus filhos Ellon Lopes e Ellen Lopes.

## **Resumo**

Neste trabalho temos como objectivo principal mostrar que toda transformação de Möbius determinada por um elemento  $A$  de  $SL(2, \mathbb{C})$  possui o mesmo efeito nas direcções nulas passado que as transformações de Lorentz correspondentes a  $A$  pela transformação spinor. Começamos o nosso estudo tecendo algumas considerações sobre uma classe particular de funções racionais definidas no plano complexo ampliado: as transformações de Möbius. De seguida introduzimos o grupo de Lorentz estudando algumas das suas propriedades e derivando duas das suas consequências mais notáveis: a dilatação do tempo e a relatividade da simultaneidade.

## **Palavras-chave:**

Esfera de Riemann, Transformações de Möbius, Transformações de Lorentz, Direcção Nula, Transformação Spinor.

## **Abstract**

The main objective of this work is to show that any Möbius transformation determined by an element  $A$  of  $SL(2, \mathbb{C})$  has the same effect on past null directions as the Lorentz transformations corresponding to  $A$  under the spinor transformation. We begin our study by making some considerations about a particular class of rational functions defined in the expanded complex plane: the Möbius transformations. We then introduce the Lorentz group by studying some of their properties and deriving two of their most striking consequences: the dilation of time and the relativity of simultaneity.

## **Keywords:**

Riemann Sphere, Möbius Transformation, Lorentz Transformation, Null Direction, Spinor Transformation.

# Conteúdo

Lista de Figuras	ii
Símbolos e Abreviaturas	iii
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Preliminares</b>	<b>5</b>
2.1 Variável complexa . . . . .	5
2.1.1 Corpo dos números complexos . . . . .	5
2.1.2 Holomorfia . . . . .	8
2.2 Grupos . . . . .	11
<b>3 A Esfera de Riemann</b>	<b>13</b>
3.1 Projecção estereográfica . . . . .	13
3.2 Comportamento de funções no infinito . . . . .	20
<b>4 Transformações de Möbius</b>	<b>23</b>
4.1 Automorfismos de $\widehat{\mathbb{C}}$ . . . . .	23
4.2 Os geradores de $PGL(2, \mathbb{C})$ . . . . .	26
4.3 Razão cruzada . . . . .	29
4.4 Inversão geométrica . . . . .	32
4.5 Conformidade e princípio da orientação . . . . .	40
<b>5 O Grupo de Lorentz</b>	<b>43</b>
5.1 Preliminares . . . . .	43
5.2 Espaço-tempo de Minkowski . . . . .	45
5.3 Transformações de Lorentz . . . . .	50
5.4 Propriedades das transformações de Lorentz . . . . .	55
<b>6 Transformações spin e o grupo de Lorentz</b>	<b>62</b>
<b>7 Comentários Finais</b>	<b>73</b>
Bibliografia	75

# Lista de Figuras

2.1	Interpretação geométrica de: adição, subtracção, módulo e conjugado. . . . .	7
2.2	Forma trigonométrica de um número complexo. . . . .	8
2.3	Ângulo entre duas curvas. . . . .	10
3.1	Modelo do plano complexo ampliado. . . . .	13
3.2	Projecção estereográfica em coordenadas esféricas. . . . .	15
3.3	Ângulos preservados pela projecção estereográfica. . . . .	17
3.4	Relação entre $d(N, z)$ e $d(N, \hat{z})$ . . . . .	18
3.5	Distância na esfera de Riemann. . . . .	19
3.6	Rotação induzida por $I(z) = z^{-1}$ . . . . .	21
4.1	Inversão de feixes de rectas. . . . .	28
4.2	Aplicação da circunferência unitária no eixo real. . . . .	31
4.3	Caracterização das circunferências em $\widehat{\mathbb{C}}$ . . . . .	32
4.4	Inversão geométrica numa circunferência $\mathcal{K}(q, R)$ , com $\rho =  z_1 - q $ e $ z_2 - q  = R$ . . . . .	32
4.5	Inversão geométrica numa circunferência $C$ de centro $0$ e raio $1$ . . . . .	33
4.6	Determinação do inverso geométrico de um ponto $z$ no interior de $\mathcal{K}$ . . . . .	34
4.7	Figura ilustrativo da Proposição 14. . . . .	35
4.8	A inversão na circunferência $\mathcal{K}$ de uma recta $L$ que não passa pelo centro $q$ de $\mathcal{K}$ . . . . .	36
4.9	A inversão na circunferência $\mathcal{K}$ de uma circunferência que não passa pelo centro $q$ de $\mathcal{K}$ . . . . .	37
4.10	Quadrilátero de vértices $z_1, z_2, z_3, z_4$ inscrito numa circunferência. . . . .	37
4.11	Inversão dos vértices $z_2, z_3, z_4$ do quadrilátero $(z_1 z_2 z_3 z_4)$ numa circunferência $\mathcal{K}$ centrada em $z_1$ . . . . .	38
4.12	Comportamento da transformação de Möbius $T$ . . . . .	42
5.1	Cone nulo ou cone de luz. . . . .	46
5.2	Cone do tempo. . . . .	52
5.3	Cone nulo futuro. . . . .	53
5.4	Configuração padrão. . . . .	58
6.1	A esfera $S^-$ . . . . .	68
6.2	Projecção estereográfica em $S^-$ . . . . .	69

# Símbolos e Abreviaturas

$id$	Transformação identidade
$\cot(\alpha)$	Cotangente do ângulo $\alpha$
$\bar{z}$	Conjugado do número complexo $z$
$Im(z)$	Parte imaginária do número complexo $z$
$\angle ABC$	Ângulo com vértice em $B$ e lados $AB$ e $BC$
$\triangle ABC$	Triângulo cujos vértices são os pontos $A$ , $B$ e $C$
$\sim$	Símbolo de semelhança
$d(A, B)$	Distância entre os pontos $A$ e $B$
$A \simeq B$	$A$ é isomorfo a $B$
$\mathbb{S}^2$	Esfera unitária
$\mathbb{C}$	Conjunto dos números complexos
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\mathbb{R}^n$	Espaço euclidiano $n$ -dimensional
$\widehat{\mathbb{C}}$	Plano complexo ampliado (ou estendido)
$\arg(z)$	Argumento do número complexo $z$
$A - B$	Diferença entre os conjuntos $A$ e $B$
$D(z_0, r)$	Disco aberto de centro $z_0$ e raio $r$
$\overline{D}(z_0, r)$	Disco fechado de centro $z_0$ e raio $r$
$\equiv$	Símbolo de congruência
$N(\phi)$	Núcleo do homomorfismo $\phi$
$G/H$	Grupo quociente de $G$ por um subgrupo $H$
$GL(2, \mathbb{C})$	Grupo linear geral
$SL(2, \mathbb{C})$	Grupo linear especial
$Aut(\widehat{\mathbb{C}})$	Grupo dos automorfismo de $\widehat{\mathbb{C}}$
$A^T$	Transposta da matriz $A$
$A^*$	Transposta da conjugada da matriz $A$
$\det A$	Determinante da matriz $A$

## Introdução

Uma transformação de Möbius é uma função racional complexa de variável complexa da forma  $T(z) = (az + b)/(cz + d)$ , onde  $a, b, c, d$  são números complexos que satisfazem a condição  $ad - bc \neq 0$ . Segundo Needham [12] essas transformações possuem atributos notáveis e encontram aplicações variadas.

Em 1905, Einstein publicou um artigo célebre intitulado “*Zur Elektrodynamik bewegter Körper*” [4] em que expõe uma nova teoria do espaço e do tempo, a chamada *teoria da relatividade restrita ou especial*. Apesar de tal teoria ser hoje em dia conhecida como a generalização da mecânica clássica para velocidades próximas à da luz, ela não nasceu de considerações mecânicas, mas sim de certas inconsistências entre o princípio da relatividade de Galileu e o electromagnetismo (*vide* e.g [1]).

As transformações de Möbius estão intimamente relacionados com a teoria da relatividade restrita de Einstein (*vide* [15]). Apelando à geometria do espaço-tempo de Minkowski, esta relação tem sido explorada, com sucesso notável, pelo matemático e físico inglês, Sir Roger Penrose.

Em [11], Nabor considera que o espaço-tempo de Minkowski, cujos elementos são chamados de *eventos*, é a arena apropriada dentro do qual se formulam as leis da física que não se referem especificamente a fenómenos gravitacionais.

Neste trabalho, estaremos interessados numa determinada classe de observadores, chamados “admissíveis”, e nos meios que utilizam para descrever (localizar no espaço e no tempo) um dado evento. Vamos denotar os sistemas de coordenadas tridimensionais dos observadores  $O$  e  $\hat{O}$ , respectivamente, por  $\Sigma$  e  $\hat{\Sigma}$ .

*Cada observador admissível situa-se na origem de um sistema cartesiano tridimensional (baseado numa unidade de comprimento combinada) em relação à qual os fótons se propagam, em qualquer direcção, de forma rectilínea.*

É um facto da experiência humana que cada observador possui um senso de ordem temporal inato e intuitivo que se aplica a eventos na sua *linha do mundo* (sequência contínua de eventos) (ver e.g. [11]). Esse sentido, no entanto, não é quantitativo; não há um senso preciso e confiável de “igualdade” para intervalos de tempo.

*Cada observador admissível dispõe de um relógio, baseada numa unidade de tempo combinada, com a qual fornece uma ordem temporal quantitativa para os eventos na sua linha do mundo.*

Para que um observador possa atribuir “tempo” a eventos arbitrários, é preciso especificar um procedimento para a localização e sincronização de relógios em todo o sistema de coordenadas espaciais. Para uma resenha de como sincronizar os relógios remetemos o leitor para [11] ou capítulo 1 de [14].

Estando os relógios sincronizados pede-se a todos os observadores que multipliquem cada uma das suas leituras de tempo pela constante  $c = 300000 \text{ km/s}$  e mendem o tempo em unidades de distância (tempo de viagem da luz, por exemplo, um metro de tempo é a quantidade de tempo necessária para que luz percorra um metro no vácuo). Com estas unidades todas as velocidades são adimensionais e  $c = 1$ . Tais leituras de tempo para os observadores  $O$  e  $\hat{O}$  serão designados, respectivamente, por  $x^4 (= ct)$  e  $\hat{x}^4 (= c\hat{t})$ . Desse modo cada um dos observadores  $O$  e  $\hat{O}$  estabeleceu, respectivamente, um *sistema de referência*  $\mathcal{S}(x^1, x^2, x^3, x^4)$  e  $\hat{\mathcal{S}}(\hat{x}^1, \hat{x}^2, \hat{x}^3, \hat{x}^4)$ . Sendo assim, pode-se perguntar, como as coordenadas de um evento em  $\hat{\mathcal{S}}$  estão relacionadas com as coordenadas do mesmo evento em  $\mathcal{S}$ ? Ou seja, o que pode ser dito sobre a transformação  $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  definida por  $F(x^1, x^2, x^3, x^4) = (\hat{x}^1, \hat{x}^2, \hat{x}^3, \hat{x}^4)$ ? Para responder a essa pergunta vamos admitir, como feito em [11], a seguinte suposição de causalidade:

*Quaisquer dois observadores admissíveis concordam com a ordem temporal de quaisquer dois eventos na linha do mundo de um fotão, ou seja, se dois desses eventos tem coordenadas  $(x^1, x^2, x^3, x^4)$  e  $(x_0^1, x_0^2, x_0^3, x_0^4)$  em  $\mathcal{S}$  e  $(\hat{x}^1, \hat{x}^2, \hat{x}^3, \hat{x}^4)$  e  $(\hat{x}_0^1, \hat{x}_0^2, \hat{x}_0^3, \hat{x}_0^4)$  em  $\hat{\mathcal{S}}$ , então  $\Delta x^4 = x^4 - x_0^4$  e  $\Delta \hat{x}^4 = \hat{x}^4 - \hat{x}_0^4$  possuem o mesmo sinal.*

Portanto, os observadores  $O$  e  $\hat{O}$  concordam com qual dos dois eventos ocorreu primeiro e, além disso, a transformação  $F$  preserva a ordem da quarta coordenada, pelo menos para eventos que se encontram na linha de mundo de um fotão.

Como os fótons propagam-se em linha recta com velocidade 1, dois eventos na linha do mundo de um fotão tem coordenadas em  $\mathcal{S}$  que satisfazem

$$x^k - x_0^k = v^k(x^4 - x_0^4), \quad k = 1, 2, 3$$

onde  $v^1, v^2$  e  $v^3$  são constantes satisfazendo  $(v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2 = 1$ . Consequentemente

$$(x^1 - x_0^1)^2 + (x^2 - x_0^2)^2 + (x^3 - x_0^3)^2 - (x^4 - x_0^4)^2 = 0. \quad (1.1)$$

Geometricamente, (1.1) é interpretada como sendo a equação de um cone em  $\mathbb{R}^4$  com vértice em  $(x_0^1, x_0^2, x_0^3, x_0^4)$ . Tudo isso deve ser verdade em qualquer sistema de referência admissível, de modo que  $F$  deve preservar o cone (1.1). Assim, a transformação de coordenadas  $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  leva o cone (1.1) no cone

$$(\hat{x}^1 - \hat{x}_0^1)^2 + (\hat{x}^2 - \hat{x}_0^2)^2 + (\hat{x}^3 - \hat{x}_0^3)^2 - (\hat{x}^4 - \hat{x}_0^4)^2 = 0. \quad (1.2)$$

onde  $\hat{x}^4 > \hat{x}_0^4$  sempre que  $x^4 > x_0^4$ .

**Nota.** Faremos o uso da convenção de soma de Einstein de acordo com a qual um índice repetido, um subscrito e um sobscrito, indica uma soma sobre o conjunto de valores que o índice pode assumir. Por exemplo, se  $a$  e  $b$  são índices que variam em  $\{1, 2, 3, 4\}$ , então

$$\begin{aligned} x^a e_a &= \sum_{a=1}^4 x^a e_a = x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3 + x^4 e_4, \\ \Lambda^a{}_b x^b &= \sum_{b=1}^4 \Lambda^a{}_b x^b = \Lambda^a{}_1 x^1 + \Lambda^a{}_2 x^2 + \Lambda^a{}_3 x^3 + \Lambda^a{}_4 x^4, \\ \eta_{ab} v^a w^b &= \eta_{11} v^1 w^1 + \eta_{12} v^1 w^2 + \eta_{13} v^1 w^3 + \eta_{14} v^1 w^4 + \eta_{21} v^2 w^1 + \dots + \eta_{44} v^4 w^4. \end{aligned}$$

Em 1964, Zeeman [18], provou que qualquer transformação  $F$  é uma composição das seguintes transformações:

1. Translações:  $\hat{x}^a = x^a + \Lambda^a$ ,  $a = 1, 2, 3, 4$ , para alguma constante  $\Lambda^a$ ;
2. Homotetias:  $\hat{x}^a = kx^a$ ,  $a = 1, 2, 3, 4$ , para alguma constante  $k > 0$ ;
3. Transformações lineares:

$$\hat{x}^a = \Lambda^a{}_b x^b, \quad a = 1, 2, 3, 4 \tag{1.3}$$

onde a matriz  $\Lambda = [\Lambda^a{}_b]_{a,b=1,2,3,4}$  satisfaz as duas condições:

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta, \tag{1.4}$$

onde  $T$  significa transposta e

$$\eta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

e

$$\Lambda^4{}_4 \geq 1. \tag{1.5}$$

Nesta dissertação estaremos interessados em estudar sistemas admissíveis relacionados pelas transformações da forma (1.3) sujeitas as restrições (1.4) e (1.5). Estas são as chamadas transformações de Lorentz ortocrônicas e como mostraremos no capítulo 6, são precisamente as transformações que deixam invariante a forma quadrática  $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - (x^4)^2$  e que preservam a orientação temporal descrito imediatamente após (1.2). É a geometria dessa forma quadrática, a estrutura do grupo de Lorentz e algumas das suas interpretações físicas que serão nosso objectivo nos capítulos 5 e 6.

Há, no entanto, mais um item na agenda das nossas observações introdutórias, e na verdade é pedra angular sobre a qual a teoria da relatividade restrita é construída.

*O Princípio da Relatividade: Todos os sistemas de referencias admissíveis são completamente equivalentes para a formulação das leis da física.*

O Princípio da Relatividade é uma ferramenta poderosa para a construção da física da relatividade restrita (*vide* [14]). Este Princípio afirma que não há observadores admissíveis distintos, isto é, que nenhum pode reivindicar ter uma visão privilegiada do universo.

Os observadores admissíveis, como veremos, poderão discordar sobre algumas coisas bastante surpreendentes, como por exemplo, se dois eventos são simultâneos ou não.

O nosso trabalho consta de três momentos. No primeiro, introduzimos as transformações de Möbius estudando algumas das suas propriedades básicas, no segundo apresentamos as transformações de Lorentz (grupo de Lorentz) e deduzimos algumas das suas consequências mais imediatas e, no terceiro momento estabeleceremos uma relação existente entre as transformações de Möbius e as transformações de Lorentz via transformação spinor.

No capítulo 2 são apresentadas, algumas noções de variável complexa e de grupos, para o uso nos capítulos seguintes. No capítulo 3 ampliaremos o sistema  $\mathbb{C}$  dos números complexos com a introdução do infinito,  $\infty$ , definindo, assim, o plano complexo ampliado  $\widehat{\mathbb{C}}$  e, estudaremos algumas das relações existentes entre  $\widehat{\mathbb{C}}$  e a esfera unitária  $\mathbb{S}^2$ , via projecção estereográfica.

No capítulo 4, definiremos as transformações de Möbius e mostraremos algumas das suas propriedades, como por exemplo, uma estrutura de grupo no conjunto destas transformações e da preservação de “circunferências”. No capítulo 5 introduzimos o espaço vectorial quadridimensional no qual está definida uma forma bilinear simétrica, não degenerada e de índice 1 chamado espaço-tempo de Minkowski. Em seguida introduzimos o grupo das transformações lineares de  $\mathbb{R}^4$  que perservam a forma de Lorentz, chamado grupo de Lorentz e, discutiremos algumas das suas consequências a saber: a dilatação do tempo, a relatividade da simultaneidade e a lei da composição das velocidades.

No capítulo 6 estudaremos o homomorfismo spinor entre o grupo linear especial  $SL(2, \mathbb{C})$  e o grupo de Lorentz  $\mathcal{L}$ , com o objectivo de mostrar que toda transformação de Möbius determinada por  $A \in SL(2, \mathbb{C})$  possui o mesmo efeito nas direcções nulas passado que as transformações de Lorentz  $\Lambda_A$  determinada por  $A$ .

Finalmente, terminamos esta dissertação apresentando no capítulo 7 algumas considerações sobre o trabalho desenvolvido.

# Capítulo 2

## Preliminares

Neste capítulo introduziremos algumas definições e resultados de grupos e da análise complexa que serão utilizados nos capítulos seguintes. Não temos o intuito de fazer uma exposição sistemática nem completa desses preliminares. Sempre que for possível, daremos as indicações bibliográficas necessárias para que o leitor encontre as demonstrações aqui omitidas. De um modo geral, as referências principais para este capítulo são [3] e [5].

### 2.1 Variável complexa

Nesta secção estudaremos a noção de corpos dos números complexos e também iremos investigar algumas das consequências geométricas da existência de derivada de uma função complexa de variável complexa.

#### 2.1.1 Corpo dos números complexos

Dados  $z = (a, b)$ ,  $w = (c, d)$  em  $\mathbb{R}^2$  e um número real  $\lambda$ , definimos a soma  $z + w$  e o produto por escalar  $\lambda z$  pondo

$$\begin{aligned}z + w &= (a + c, b + d), \\ \lambda z &= (\lambda a, \lambda b).\end{aligned}\tag{2.1}$$

Estas operações fazem de  $\mathbb{R}^2$  um espaço vectorial bidimensional sobre o corpo dos números reais, no qual o elemento neutro para adição é  $(0, 0)$  e o elemento simétrico de  $z = (a, b)$  é  $-z = (-a, -b)$ . Além da estrutura de espaço vectorial, o plano  $\mathbb{R}^2$  possui uma multiplicação, segundo a qual o produto de  $z = (a, b)$  por  $w = (c, d)$  é definido pela seguinte regra:

$$z \cdot w = (ac - bd, ad + bc).\tag{2.2}$$

Não é difícil verificar que esta multiplicação é comutativa, associativa, distributiva em relação à adição e admite o elemento  $(1, 0)$  como elemento neutro multiplicativo.

Quando quisermos dizer que estamos considerando o conjunto  $\mathbb{R}^2$  munido da multiplicação definida em (2.2), usaremos a notação  $\mathbb{C}(= \mathbb{R}^2)$  chamado *conjunto dos números complexos*.

**Lema 1.** *Se  $z$  é um número complexo não nulo, então existe  $z^{-1} \in \mathbb{C}$ , chamado inverso multiplicativo, tal que  $z \cdot z^{-1} = (1, 0)$ .*

**Teorema 1.** *O conjunto  $\mathbb{C}$  dos números complexos munido da adição (2.1) e da multiplicação (2.2) define um corpo, chamado corpo dos números complexos e representa-se pela notação  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ .*

**Nota 1.** *O subconjunto de  $\mathbb{C}$ ,*

$$\mathbb{C}_1 = \{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\}$$

*é um corpo. A função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}_1$  definida por  $f(a) = (a, 0)$  é um isomorfismo entre corpos, como facilmente se comprova. De facto,  $f$  é claramente bijectiva e, para  $a, b \in \mathbb{R}$ , tem-se*

$$f(a + b) = f(a) + f(b) \quad e \quad f(ab) = f(a)f(b).$$

*Podemos, assim, identificar  $(a, 0)$  com  $a$  e considerar  $\mathbb{R}$  como subconjunto de  $\mathbb{C}$ .*

Denotemos o par  $(0, 1)$  pelo símbolo  $i$ . Obtemos deste modo, a seguinte representação para os números complexos:

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1) = a + bi,$$

tendo em conta a identificação definida pela função  $f$  acima. Assim, a forma  $(a, b) = a + bi$ , com  $a, b \in \mathbb{R}$ , determina um novo modo de representar os números complexos, o qual é habitualmente designado por *representação algébrica dos complexos*. O símbolo  $i$  é a *unidade imaginária*. Da definição (2.2) dada para a multiplicação de números complexos resulta que:  $i^2 = -1$ .

**Observação 1.** *Sendo  $\mathbb{C}$  um corpo, a multiplicação é comutativa, por isso, também podemos escrever  $(a, b) = a + ib$ , com  $a, b \in \mathbb{R}$ . Com esta notação, a definição do produto  $z \cdot w$  se torna natural: para multiplicar  $z = a + ib$  por  $w = c + id$ , opera-se como se fosse com números reais, tendo-se apenas o cuidado de substituir  $i^2$  por  $-1$ . Assim,*

$$\begin{aligned} z \cdot w &= (a + ib)(c + id) = ac + i(bc + ad) + i^2bd \\ &= (ac - bd) + i(bc + ad). \end{aligned}$$

A ordenação usual em  $\mathbb{R}$  não pode ser estendida para o corpo dos números complexos, carecendo de sentido desigualdades entre números complexos do tipo  $z < w$ .

**Proposição 1.** *O corpo  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  dos números complexos não é ordenado, para a ordenação usual nos reais.*

*Demonstração.* A demonstração dessa proposição pode ser encontrada em [3]. □

**Nota 2.** Ao longo do trabalho, qualquer desigualdade que venha ocorrer, dirá respeito unicamente a números reais, mesmo que tal não seja explicitado.

**Definição 1.** Dado o número complexo  $z = a + ib$ , os números reais  $a$  e  $b$  dizem-se, respectivamente, parte real e parte imaginária de  $z$ , sendo denotados, respectivamente, por  $Re(z)$  e  $Im(z)$ . Chama-se conjugado de  $z = a + ib$  ao número complexo  $\bar{z} = a - ib$ . Ao número real não negativo  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$  chama-se módulo ou valor absoluto de  $z$ .

O teorema que se segue lista um conjunto de propriedades referentes ao módulo e conjugado de números complexos. Para a demonstração, veja por exemplo, [8].

**Teorema 2** (Propriedades do módulo e do conjugado). Para  $z, w \in \mathbb{C}$ , tem-se:

- |                                      |  |  |
|--------------------------------------|--|--|
| (a) $z + \bar{z} = 2Re(z)$           | (b) $z - \bar{z} = 2i Im(z)$           | (c) $\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}$ |
| (d) $\overline{z\bar{w}} = \bar{z}w$ | (e) $\overline{\bar{z}} = z$           | (f) $ z  =  \bar{z} $                          |
| (g) $z\bar{z} =  z ^2$               | (h) $z^{-1} = \bar{z}/ z ^2, z \neq 0$ | (i) $ z + w  \leq  z  +  w $                   |

Uma vez que, o conjunto dos números complexos  $\mathbb{C}$  nada mais é que o conjunto  $\mathbb{R}^2$ , podemos identificar o número complexo  $z = x + iy$  com o ponto  $(x, y)$  do plano cartesiano, a que é vulgar chamar *afixo* de  $z$ . Quando a cada número complexo  $z$  se associa o seu afixo, é usual designar-se o plano cartesiano  $oxy$  por *plano complexo* ou *plano de Argand*.

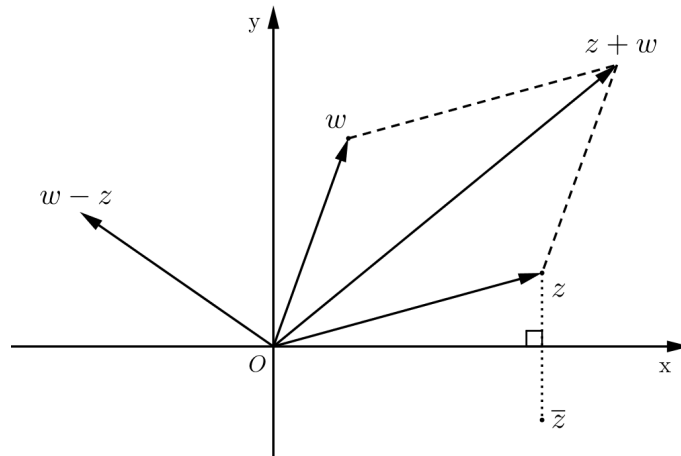


Fig. 2.1: Interpretação geométrica de: adição, subtração, módulo e conjugado.

**Definição 2.** Seja  $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ . O argumento de  $z$ , denotado por  $\arg(z)$ , é a medida de amplitude, em radianos, do ângulo do vector  $z$ , contado a partir da parte positiva do eixo das abcissas. Este ângulo considera-se positivo se se mede no sentido anti-horário e negativo no sentido contrário.

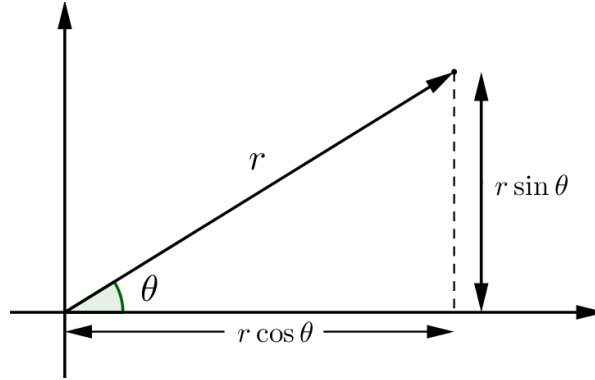


Fig. 2.2: Forma trigonométrica de um número complexo.

Sendo  $\theta$  o argumento de  $z$  e definindo  $r = |z|$ , a figura (2.2) mostra que

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta),$$

chamada *forma trigonométrica* ou *polar* de  $z$ .

**Observação 2.** Também é usual utilizar-se o símbolo  $e^{i\theta}$ , o qual é definido através da fórmula de Euler:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

Assim, podemos representar o número complexo  $z$  na seguinte forma:  $z = r e^{i\theta}$ .

### 2.1.2 Holomorfia

Esta subsecção centra-se na investigação de algumas das consequências geométricas da existência de derivada de uma função complexa. Para tal, iniciamos a mesma introduzindo a noção de derivada de uma função complexa.

**Definição 3.** No conjunto dos números complexos, um domínio é um subconjunto não vazio, aberto e conexo.

**Definição 4.** Seja  $f$  uma função complexa de variável complexa definida num domínio  $D$  e seja  $z_0 \in D$ . A função  $f : D \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  diz-se derivável em  $z_0 \in D$ , se existe e é finito o limite da razão incremental

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}. \quad (2.3)$$

A este limite chama-se *derivada* de  $f$  no ponto  $z_0$  e representa-se por  $f'(z_0)$ .

**Observação 3.** Escrevendo na expressão (2.3)  $\Delta z = z - z_0$ , a derivada de  $f$  no ponto  $z_0 \in D$  torna-se o limite:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

Assim, se existe a derivada de  $f$  no ponto  $z_0$ , então para cada número positivo  $\varepsilon > 0$ , existe um  $\delta > 0$  tal que

$$\left| \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} - f'(z_0) \right| < \varepsilon,$$

sempre que  $|\Delta z| < \delta$ . O ponto  $z$  é livre de se aproximar de  $z_0$  segundo uma direcção arbitrária. Para que  $f$  seja derivável no ponto  $z_0$ , a razão incremental deverá tender para um único valor, independentemente da direcção segundo a qual  $\Delta z$  se aproxima de zero. Assim,  $f$  não pode ter derivada em  $z_0$  se a razão incremental apresentar diferentes valores de limite quando  $\Delta z$  se aproxima de zero segundo direcções diferentes.

**Nota 3.** As fórmulas básicas de derivação (derivada da soma, do produto, do quociente, da função composta) podem ser deduzidas da definição de derivada complexa e dos teoremas sobre limites, como no caso das funções reais de variável real.

Suponhamos que  $f : D \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , onde  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , tem derivada num ponto  $z_0 = x_0 + iy_0$  do domínio  $D$ . Assim sendo, é natural indagar se existe uma fórmula que nos permite calcular  $f'(z_0)$  em termos de  $u(x, y)$  e  $v(x, y)$ . Investigando esta ideia descobriremos que existem certas condições que devem ser satisfeitas para que  $f$  seja derivável em  $z_0$ .

**Teorema 3** (Condição necessária de derivabilidade complexa). *Se a derivada de uma função  $f : D \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f = u + iv$ , existe num ponto  $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$ , então as derivadas parciais de primeira ordem de  $u$  e  $v$ , em relação a  $x$  e a  $y$ , existem nesse ponto e satisfazem as condições*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \quad e \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0), \quad (2.4)$$

ou, numa notação mais abreviada,

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \quad e \quad u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0).$$

*Demonstração.* A demonstração desse teorema pode ser encontrada em [3]. □

**Nota 4.** As equações (2.4) são conhecidas por condições de Cauchy-Riemann. São designadas deste modo em homenagem ao matemático francês A. L. Cauchy (1789 – 1857) e ao matemático alemão G. F. B. Riemann (1826 – 1866) a quem é devida a sua descoberta. Estas equações fornecem diferentes expressões para a derivada de  $f$  em  $z_0$ , entre elas:

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) \\ &= v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0). \end{aligned} \quad (2.5)$$

As condições de Cauchy-Riemann são condições necessárias, porém não suficientes, para que uma função  $f$  tenha derivada. O teorema a seguir estabelece quais as condições impostas sobre  $u$  e  $v$  que garantam a existência da derivada de  $f$  num ponto do domínio.

**Teorema 4** (Condição suficiente de derivabilidade complexa). *Sejam  $u$  e  $v$  funções reais, de domínio  $D$ , nas variáveis  $x$  e  $y$ . Suponhamos que as suas derivadas parciais de primeira ordem existem numa vizinhança de  $(x_0, y_0)$ , sendo contínuas em  $(x_0, y_0)$ . Se essas derivadas parciais satisfazem as condições de Cauchy-Riemann nesse ponto, então a derivada da função  $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f = u + iv$ , existe no ponto  $z_0 = x_0 + iy_0$  e é dada por (2.5).*

*Demonstração.* A demonstração desse teorema pode ser encontrada em [3]. □

**Definição 5.** *A função  $f : D \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  diz-se holomorfa (ou analítica) num ponto  $z_0 \in D$  se a sua derivada  $f'$  existe não só em  $z_0$ , como ainda em todo ponto  $z$  de uma vizinhança de  $z_0$ . A função  $f$  diz-se holomorfa no domínio  $D$  se for holomorfa em todo ponto desse conjunto. A função  $f$  diz-se inteira se for holomorfa em todo o plano complexo.*

**Definição 6.** *Considerando dois caminhos de classe  $C^1$ ,  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ , que passam num ponto  $z_0$ , o ângulo formado pelas duas curvas associadas no ponto  $z_0$  é o ângulo definido pelos vectores tangentes às duas curvas nesse ponto.*

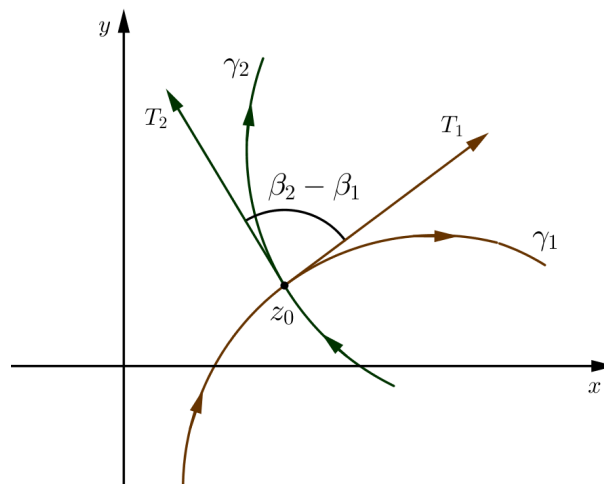


Fig. 2.3: Ângulo entre duas curvas.

**Definição 7.** *Uma função  $f : D \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  diz-se conforme em  $z_0 \in D$  se, para cada par de curvas regulares, contidas em  $D$  e intersectando-se em  $z_0$ ,  $f$  preserva a medida e o sentido dos ângulos. Se  $f$  for conforme em cada ponto do seu domínio diz-se conforme nesse domínio.*

**Exemplo 1.** *A função identidade,  $f(z) = z$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , é claramente conforme. Por outro lado, a função conjugação complexa,  $f(z) = \bar{z}$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , não é conforme, uma vez que não preserva o sentido dos ângulos.*

**Teorema 5** (Conformidade e holomorfia). *Em cada ponto  $z$  de um domínio onde  $f$  é holomorfa e  $f'(z) \neq 0$ , a função  $f$  é conforme.*

*Demonstração.* A demonstração desse teorema pode ser encontrada em [10]. □

**Teorema 6.** (Propriedades das transformações conformes bijectivas)

- (a) Se  $f : A \rightarrow B$  é conforme e bijectiva, então  $f^{-1} : B \rightarrow A$  também é conforme e bijectiva.
- (b) Se  $f : A \rightarrow B$  e  $g : B \rightarrow C$  são conformes e bijectivas, então a transformação  $g \circ f : A \rightarrow C$  é conforme e bijectiva.

*Demonstração.* A demonstração desse teorema pode ser encontrada em [3]. □

**Definição 8.** Dizemos que uma função  $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  possui uma singularidade num ponto  $z_0 \in D$ , quando não é holomorfa nesse ponto. Quando a função  $f$  for holomorfa em  $D^*(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r\}$ , para algum  $r > 0$ , dizemos que  $z_0$  é uma singularidade isolada de  $f$ . Uma singularidade isolada  $z_0$  de  $f$  diz-se um pólo quando  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ .

**Definição 9.** Uma função  $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  diz-se meromorfa em  $D$  se for holomorfa em  $D$ , exceptuando singularidades isoladas onde tem pólos.

## 2.2 Grupos

Nesta secção temos como objectivo introduzir alguns resultados elementares da teoria dos grupos, sem demonstrações, que serão usados nos capítulos seguintes.

**Definição 10.** Uma estrutura algébrica  $(G, *)$  diz-se um grupo quando satisfaz as seguintes condições:

1. A operação  $*$  tem identidade e em  $G$ .
2. A operação é associativa, isto é,  $(x * y) * z = x * (y * z)$ , para quaisquer  $x, y, z \in G$ .
3. Todos os elementos de  $G$  são invertíveis, isto é,  $\forall g \in G, \exists h \in G$  tal que  $g * h = h * g = e$ .

Se  $(G, *)$  é um grupo e  $H \subset G$  é um conjunto não-vazio, é possível que  $H$  seja fechado em relação à operação  $*$ , isto é, é possível que  $h * h' \in H$ , sempre que  $h, h' \in H$ . Neste caso, a operação  $*$  é uma operação binária em  $H$ , e podemos investigar em que condições é que  $(H, *)$  é um grupo, caso em que  $(H, *)$  se diz *subgrupo* de  $(G, *)$ .

**Proposição 2.** Se  $(G, *)$  é um grupo (com elemento neutro  $e$ ), e  $H \subset G$  é não-vazio, então  $(H, *)$  é um subgrupo de  $(G, *)$  se, e somente se,  $h * h'^{-1} \in H$ , para quaisquer  $h, h' \in H$ .

A comparação de estruturas algébricas que satisfazem a mesma definição abstracta faz-se com recurso a uma das noções mais fundamentais da Álgebra, a de *isomorfismo*, ela própria um caso particular da noção de *homomorfismo*. A respectiva definição formal apresenta-se a seguir para grupos:

**Definição 11.** Se  $(G, *)$  e  $(H, \cdot)$  são grupos, a função  $\phi : G \rightarrow H$  diz-se um homomorfismo quando

$$\phi(g * h) = \phi(g) \cdot \phi(h), \quad \forall g, h \in G.$$

Se o homomorfismo  $\phi$  é uma bijecção, então diz-se um isomorfismo, e neste caso os grupos dizem-se isomorfos.

Dado um homomorfismo de grupos  $\phi : G \rightarrow H$ , consideremos a equação  $\phi(x) = y$ , onde supomos  $y \in H$  fixo, e  $x$  a incógnita a determinar. O conjunto das soluções da equação  $\phi(x) = e$ , onde  $e \in H$ , diz-se *núcleo* do homomorfismo, designado por  $N(\phi)$ .

**Proposição 3.** Se  $(G, *)$  e  $(H, \cdot)$  são grupos, e  $\phi : G \rightarrow H$  é um homomorfismo, então o núcleo de  $\phi$  é um subgrupo de  $G$ .

É interessante observar que o núcleo de um homomorfismo não é um subgrupo arbitrário, mas sim um subgrupo com a seguinte característica:

**Definição 12.** Se  $H \subset G$  é subgrupo, dizemos que  $H$  é um subgrupo normal de  $G$ , quando, para qualquer  $h \in H$  e  $g \in G$ , temos  $ghg^{-1} \in H$ .

**Teorema 7.** Se  $\phi : G \rightarrow H$  é um homomorfismo e  $N(\phi)$  é o respectivo núcleo, então  $N(\phi)$  é um subgrupo normal de  $G$ .

**Definição 13.** Se  $(G, \cdot)$  é um grupo, e  $H \subset G$  é um subgrupo de  $G$ , definimos a relação de equivalência módulo  $H$  como se segue:

$$g_1 \equiv g_2 \pmod{H} \iff g_2^{-1} \cdot g_1 \in H.$$

**Proposição 4.** Se  $(G, \cdot)$  é um grupo, e  $H \subset G$  é um subgrupo, então  $\equiv \pmod{H}$  é uma relação de equivalência no conjunto  $G$ .

Vamos representar a classe de equivalência de  $g \in G$  para a congruência  $\pmod{H}$  por  $gH = \{gh : h \in H\}$ , que se diz uma *classe lateral esquerda* de  $H$ . O conjunto formado por todas as classes de equivalência  $\{gH : g \in G\}$  diz-se *conjunto quociente* de  $G$  por  $H$ , e designa-se por  $G/H$ . Temos portanto  $G/H = \{gH : g \in G\}$ .

**Teorema 8** (1º Teorema do isomorfismo). Se  $\phi : G \rightarrow H$  é um homomorfismo sobrejectivo de grupos e  $N(\phi)$  é o núcleo de  $\phi$ , então  $G/N(\phi)$  e  $H$  são isomorfos. Em particular, existe um isomorfismo  $\psi : G/N(\phi) \rightarrow H$  tal que  $\psi(gH) = \phi(g)$  para qualquer  $g \in G$ .

## A Esfera de Riemann

Neste capítulo, definimos a projecção estereográfica e estudamos algumas das suas propriedades básicas. Estudaremos, também, o comportamento de funções no infinito, com o objectivo de definir funções holomorfas e meromorfas em  $\infty$ .

### 3.1 Projecção estereográfica

**Definição 14.** *Os pontos do plano complexo, juntamente com o ponto ideal a que chamamos ponto do infinito, constituem o plano complexo ampliado (ou estendido), usualmente representado pelo símbolo  $\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ .*

Introduziremos, de seguida, um modelo geométrico no qual todos os pontos do plano complexo ampliado possuem uma representação “concreta”. Consideremos, então, o plano complexo  $\mathbb{C}$  posicionado no espaço euclidiano tridimensional, com sistema de eixos ortogonais, de tal modo que o seu círculo unitário coincida com o equador da esfera unitária

$$\mathbb{S}^2 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

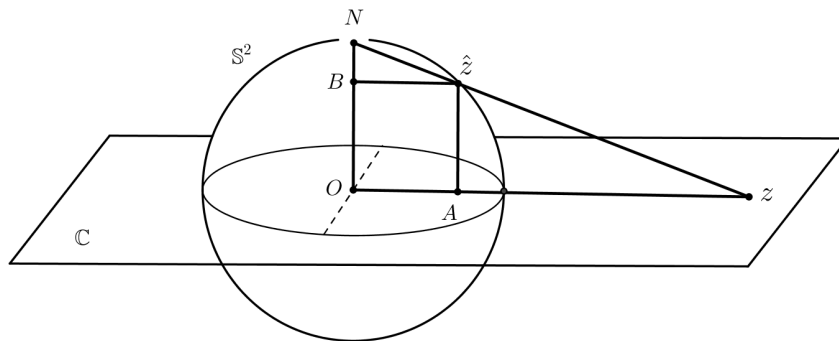


Fig. 3.1: Modelo do plano complexo ampliado.

A fim de estabelecer uma bijecção entre os pontos  $\hat{z} \in \mathbb{S}^2$ , com  $\hat{z} \neq N$ , e os pontos  $z \in \mathbb{C}$ , consideremos a semi-recta  $N\hat{z}$ , que como podemos observar da Fig. 3.1, intersecta o plano complexo  $\mathbb{C}$  num único ponto  $z$ . Esta construção permite-nos definir:

**Definição 15.** A função  $\zeta : \mathbb{S}^2 - \{N\} \rightarrow \mathbb{C}$  que transforma cada ponto  $\hat{z} \in \mathbb{S}^2 - \{N\}$  num único ponto  $z \in \mathbb{C}$  dada pela intersecção  $N\hat{z} \cap \mathbb{C}$  chama-se projecção estereográfica.

A seguir, mostraremos como a definição acima permite-nos obter uma expressão relacionando as coordenadas de um ponto  $\hat{z} \in \mathbb{S}^2 - \{N\}$  com as coordenadas de sua projecção estereográfica  $z \in \mathbb{C}$ .

**Proposição 5** (*Expressão analítica da projecção estereográfica*). Se  $z = (x, y) \in \mathbb{C}$  é a projecção estereográfica do ponto  $\hat{z} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2 - \{N\}$ , então

$$\zeta(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}. \quad (3.1)$$

*Demonstração.* Sejam  $A$  e  $B$  os pés das perpendicularidades baixadas de  $\hat{z}$  sobre  $Oz$  e  $ON$ , respectivamente (veja-se a Fig. 3.1). Temos que  $x_1 + ix_2 = hz$ , onde

$$h = \frac{\overline{OA}}{\overline{Oz}} = \frac{\overline{N\hat{z}}}{\overline{Nz}} = \frac{\overline{NB}}{\overline{NO}} = 1 - x_3. \quad \square$$

**Definição 16.** Um homeomorfismo do conjunto  $X$  sobre um conjunto  $Y$  é uma bijecção contínua  $f : X \rightarrow Y$  cuja inversa  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  também é contínua.

**Proposição 6.** A aplicação, projecção estereográfica,  $\zeta : \mathbb{S}^2 - \{N\} \rightarrow \mathbb{C}$ , dada por (3.1), define um homeomorfismo entre  $\mathbb{S}^2 - \{N\}$  e  $\mathbb{C}$ .

*Demonstração.* Sejam  $\hat{z} = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $\hat{w} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{S}^2 - \{N\}$ . Mostremos, inicialmente, que a função  $\zeta$  é injectiva, ou seja,  $\zeta(\hat{z}) = \zeta(\hat{w}) \Rightarrow \hat{z} = \hat{w}$ . Tendo em conta (3.1), é suficiente mostrar que  $x_3 = y_3$ . Com efeito,

$$\frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3} = \frac{y_1 + iy_2}{1 - y_3} \Rightarrow \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1 - x_3)^2} = \frac{y_1^2 + y_2^2}{(1 - y_3)^2} \Rightarrow \frac{1 + x_3}{1 - x_3} = \frac{1 + y_3}{1 - y_3} \Rightarrow x_3 = y_3.$$

Mostremos, agora, que  $\zeta$  é uma função sobrejectiva, ou seja, dado qualquer  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  existe  $\hat{z} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2 - \{N\}$  tal que  $z = \zeta(\hat{z})$ . Com efeito, para cada  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  definamos

$$x_1 = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \quad x_2 = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \quad x_3 = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}. \quad (3.2)$$

Cálculos simples permite-nos concluir que  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ . Assim  $\hat{z} := (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2 - \{N\}$ . Segue-se, das considerações acima, que a inversa  $\zeta^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{S}^2 - \{N\}$  é definida por (3.2). As expressões (3.1) e (3.2) mostram que  $\zeta$  e  $\zeta^{-1}$  são funções contínuas e, portanto,  $\zeta$  define um homeomorfismo entre  $\mathbb{S}^2 - \{N\}$  e  $\mathbb{C}$ .  $\square$

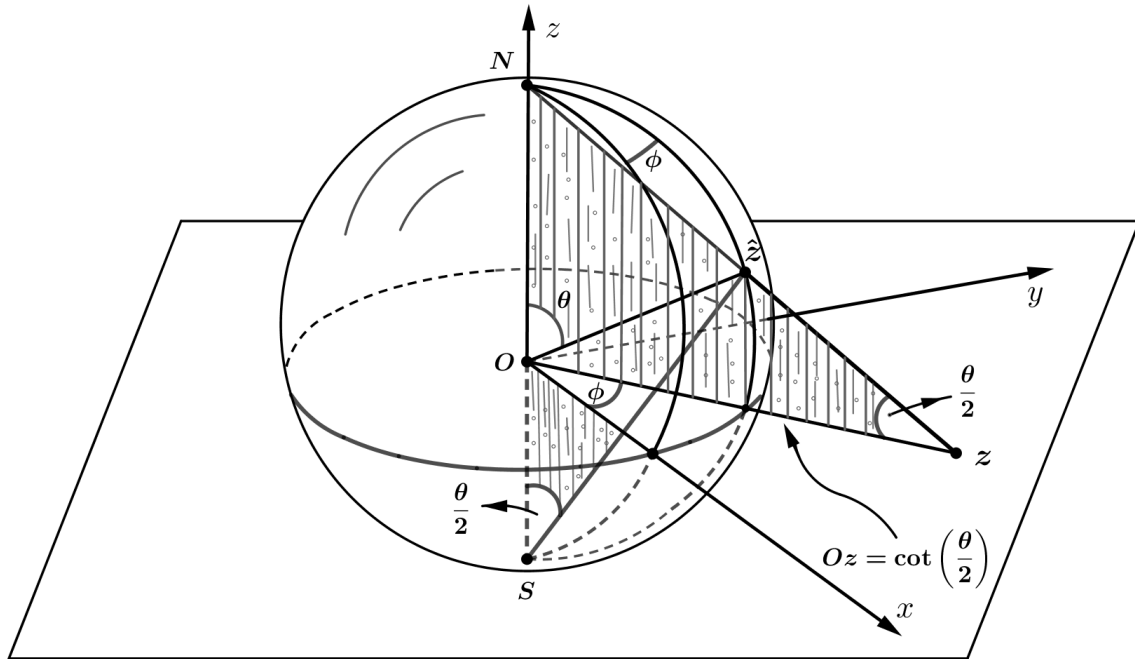


Fig. 3.2: Projecção estereográfica em coordenadas esféricas.

**Nota 5.** A correspondência,  $\zeta$ , pode completar-se, fazendo corresponder ao pólo norte da esfera o ponto do infinito, isto é, definindo  $\zeta(N) = \infty$  e  $\zeta^{-1}(\infty) = N$ . A correspondência  $\zeta : \mathbb{S}^2 \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ , define um homeomorfismo entre a esfera e o plano complexo ampliado. Deste modo, consideramos a esfera como representação do plano complexo ampliado, e designaremos  $\mathbb{S}^2$  por esfera de Riemann.

Vamos, agora, relacionar as coordenadas de  $\hat{z}$  e da sua projecção estereográfica  $z$  em termos de coordenadas esféricas  $(\theta, \phi)$  (veja-se a Fig. 3.2).

**Proposição 7.** Se  $z \in \mathbb{C}$  é a projecção estereográfica do ponto  $\hat{z} = (\theta, \phi) \in \mathbb{S}^2$ , então

$$\zeta(\hat{z}) = \cot(\theta/2) e^{i\phi}. \quad (3.3)$$

*Demonstração.* Seja  $r = \overline{Oz}$ . Se  $z$  é a projecção estereográfica do ponto  $\hat{z}$  de coordenadas  $(\theta, \phi)$ , então  $z = r e^{i\phi}$ . Observando a Fig. 3.2 fica claro que os triângulos  $N\hat{z}S$  e  $NOz$  são semelhantes (critério AA), e como  $\angle NS\hat{z} = \theta/2$  segue-se que  $r = \cot(\theta/2)$ .  $\square$

**Corolário 1.** Sejam  $\hat{z}_1 = (\theta, \phi) \in \mathbb{S}^2$  e  $\hat{z}_2 = (\pi - \theta, -\phi)$  um ponto, também da esfera, obtido através da rotação da esfera segundo o ângulo  $\pi$  em torno do eixo real. Se  $z_1$  e  $z_2$  são as imagens estereográficas de  $\hat{z}_1$  e  $\hat{z}_2$ , respectivamente, então  $z_2 = 1/z_1$ .

*Demonstração.* Com efeito, pela Proposição 7, tem-se

$$z_2 = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) e^{-i\phi} = \frac{1}{\cot(\theta/2)} \frac{1}{e^{i\phi}} = \frac{1}{z_1}. \quad \square$$

**Corolário 2.** Se  $\hat{z}_1$  e  $\hat{z}_2$  são pontos diametralmente opostos de  $\mathbb{S}^2$ , então suas projecções estereográficas  $z_1$  e  $z_2$  satisfazem a condição  $z_2 = -1/\bar{z}_1$ .

*Demonstração.* Com efeito, se  $\hat{z}_1 = (\theta, \phi)$ , então  $\hat{z}_2 = (\pi - \theta, \pi + \phi)$ . Da Proposição 7 segue-se

$$z_1 = \cot(\theta/2) e^{i\phi} \quad \text{e} \quad z_2 = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) e^{i(\pi+\phi)}.$$

Substituindo  $\cot\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) = 1/\cot(\theta/2)$  na equação acima, obtemos

$$z_2 = -\frac{1}{\cot(\theta/2)} \frac{1}{e^{-i\phi}} = -1/\bar{z}_1. \quad \square$$

**Observação 4.** As linhas de longitude e de latitude na esfera correspondem, respectivamente, a rectas passando pela origem e a circunferências com centro na origem do plano complexo. Em particular, a medida que os raios das circunferências no plano tendem para o infinito, as linhas de latitude na esfera tendem para o pólo norte, justificando assim, em fazer o pólo norte  $N$  corresponder ao ponto  $\infty$ .

**Proposição 8.** A projecção estereográfica transforma circunferências na esfera em rectas ou circunferências no plano complexo ampliado.

*Demonstração.* Sejam a circunferência  $C \subset \mathbb{S}^2$ , e o plano  $\pi \subset \mathbb{R}^3$  definida pela equação  $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ , tal que  $\pi \cap \mathbb{S}^2 = C$ . A projecção estereográfica de  $C$  consiste de todos os pontos  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  que satisfazem

$$a \frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1} + ib \frac{\bar{z} - z}{|z|^2 + 1} + c \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} = d \frac{|z|^2 + 1}{|z|^2 + 1},$$

ou equivalentemente,

$$(c - d)z\bar{z} + (a - ib)z + (a + ib)\bar{z} - c - d = 0.$$

Definindo  $\alpha := c - d$ ,  $\sigma := a - ib$  e  $\beta := -c - d$ , a última equação acima pode ser reescrita como

$$\alpha z\bar{z} + \sigma z + \bar{\sigma} \bar{z} + \beta = 0,$$

e ela define uma recta se  $\alpha = 0$ , ou seja, quando  $N \in C$ , e uma circunferência se  $\alpha \neq 0$ , ou seja, quando o pólo norte  $N \notin C$ .  $\square$

**Nota 6.** Segundo matemático alemão C. F. Gauss, é impossível construir uma transformação entre espaços com curvaturas diferentes, que preserva simultaneamente distâncias e ângulos [2]. Em particular, como a curvatura de  $\mathbb{C}$  é 0 e a curvatura de  $\mathbb{S}^2$  é 1, mostraremos nas duas proposições que se seguem que a projecção estereográfica é uma transformação conforme que não preserva distâncias.

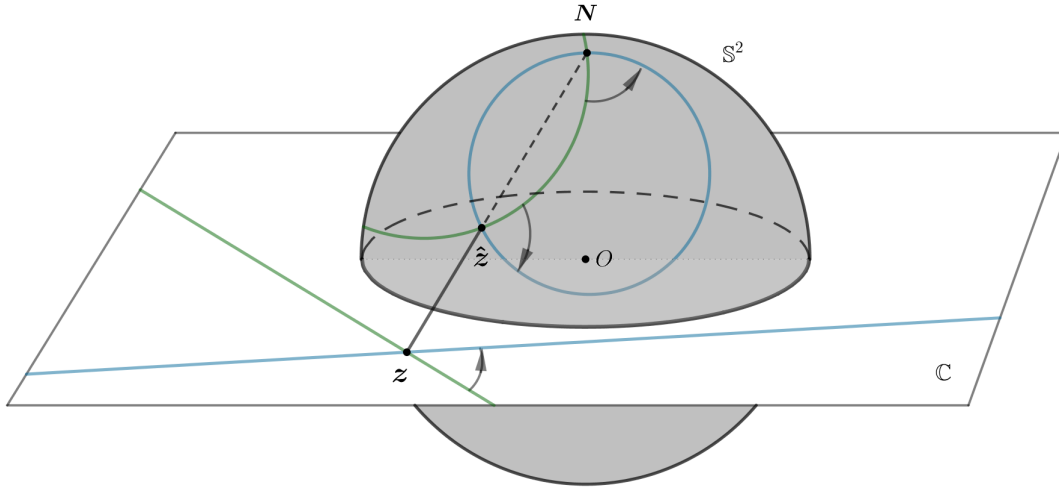


Fig. 3.3: Ângulos preservados pela projecção estereográfica.

Com base na Fig. 3.3, o ângulo em  $z$  é positivo, ou seja, no sentido anti-horário, quando é visto de cima do plano. Porém, o ângulo em  $\hat{z}$  é negativo, ou seja, no sentido horário. No entanto, se olharmos este ângulo de dentro da esfera, então ele será positivo. Assim, um ângulo em  $\mathbb{S}^2$ , orientado no sentido anti-horário diz-se positivo se for visto de dentro da esfera.

**Proposição 9.** A projecção estereográfica  $\zeta : \mathbb{S}^2 - \{N\} \rightarrow \mathbb{C}$  é uma transformação conforme.

*Demonstração.* Tendo em conta o Teorema 6, é suficiente mostrar que  $\zeta^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{S}^2 - \{N\}$  é conforme. Sejam  $z \in \mathbb{C}$  e  $l_1, l_2$  rectas em  $\mathbb{C}$ , que se intersectam segundo ângulo  $\theta$  em  $z$  (veja-se a Fig. 3.3). Se  $\pi_j$  é o plano que passa por  $N$  e  $l_j$  ( $j = 1, 2$ ), então  $\mathbb{S}^2 \cap \pi_j$  é uma circunferência  $C_j$  em  $\mathbb{S}^2$ . Para cada  $P \in l_j$ , a recta  $NP$  intersecta  $\mathbb{S}^2$  em  $\zeta^{-1}(P) \in \mathbb{S}^2 \cap \pi_j$ , portanto  $C_j = \zeta^{-1}(l_j \cup \{\infty\})$ . Em particular, as circunferências  $C_1$  e  $C_2$  intersectam-se em  $N$  e em  $\hat{z} = \zeta^{-1}(z)$ . O plano  $\beta$ , tangente à esfera no ponto  $N$ , é paralelo ao plano equatorial  $\mathbb{C}$ . Portanto as rectas  $r_j = \beta \cap \pi_j$  que se intersectam em  $N$ , são paralelas às rectas  $l_j = \mathbb{C} \cap \pi_j$  e, portanto, formam um ângulo  $\theta$  em  $N$ . As circunferências  $C_j$  intersectam-se segundo o mesmo ângulo nos pontos de intersecção  $N$  e  $\hat{z}$ . Como  $r_j$  é tangente a  $C_j$ , em  $N$ , esse ângulo deve ser igual a  $\theta$ , portanto  $\zeta^{-1}(l_1)$  e  $\zeta^{-1}(l_2)$  intersectam-se segundo o ângulo  $\theta$  em  $\hat{z} = \zeta^{-1}(z)$ . Com as orientações definidas acima, obtemos o pretendido.  $\square$

**Lema 2.** Se  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  é a imagem estereográfica do ponto  $\hat{z} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2 - \{N\}$ , então o produto das distâncias  $d(N, z)$  e  $d(N, \hat{z})$  é sempre igual a uma constante. Mais precisamente,

$$d(N, z) \cdot d(N, \hat{z}) = 2. \quad (3.4)$$

*Demonstração.* Como os triângulos  $\triangle NX\hat{z}$  e  $\triangle NOz$  da Fig. 3.4 são semelhantes, vem

$$d(N, z) d(N, X) = d(N, \hat{z}). \quad (3.5)$$

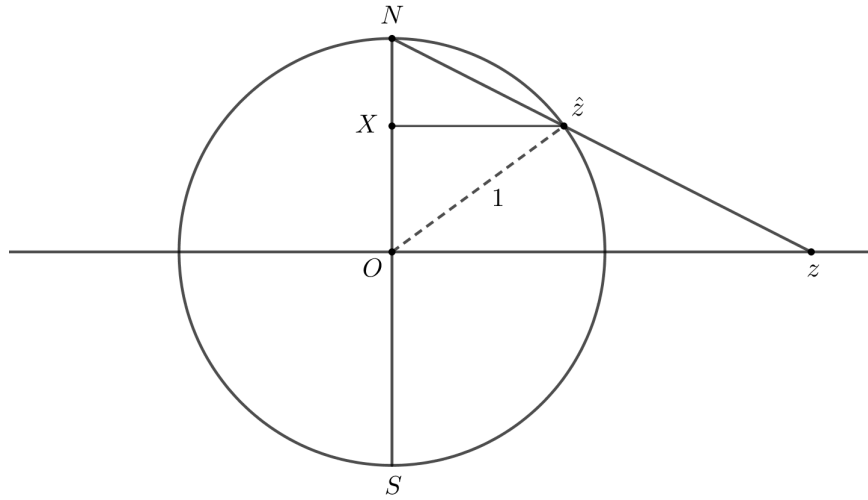


Fig. 3.4: Relação entre  $d(N, z)$  e  $d(N, \hat{z})$ .

Multiplicando ambos os membros de (3.5) por  $d(N, \hat{z})/d(N, X)$ , obtemos

$$d(N, \hat{z}) d(N, z) = \frac{d^2(N, \hat{z})}{d(N, X)}. \quad (3.6)$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras ao  $\triangle NX\hat{z}$  e tendo em conta que  $d(N, X) = 1 - d(X, O)$ , de (3.6) vem

$$\begin{aligned} d(N, \hat{z}) d(N, z) &= \frac{(1 - d(X, O))^2 + d^2(X, \hat{z})}{1 - d(X, O)} \\ &= \frac{2 - 2d(X, O)}{1 - d(X, O)} \\ &= 2, \end{aligned}$$

conforme pretendido. □

Vejamos agora como determinar a distância usual entre dois pontos da esfera de Riemann a partir das suas imagens estereográficas no plano complexo ampliado.

**Proposição 10** (Distância da corda). *Sejam  $z_1, z_2 \in \widehat{\mathbb{C}}$  e  $\hat{z}_1, \hat{z}_2 \in \mathbb{S}^2$ . Se  $z_1 = \zeta(\hat{z}_1)$  e  $z_2 = \zeta(\hat{z}_2)$ , então para  $z_1, z_2 \neq \infty$ ,*

$$d(\hat{z}_1, \hat{z}_2) = \frac{2|z_2 - z_1|}{\sqrt{1 + |z_1|^2} \sqrt{1 + |z_2|^2}}. \quad (3.7)$$

*Demonstração.* Como  $z_1 = \zeta(\hat{z}_1)$  e  $z_2 = \zeta(\hat{z}_2)$ , de (3.4), vem

$$d(N, z_1) d(N, \hat{z}_1) = d(N, z_2) d(N, \hat{z}_2).$$

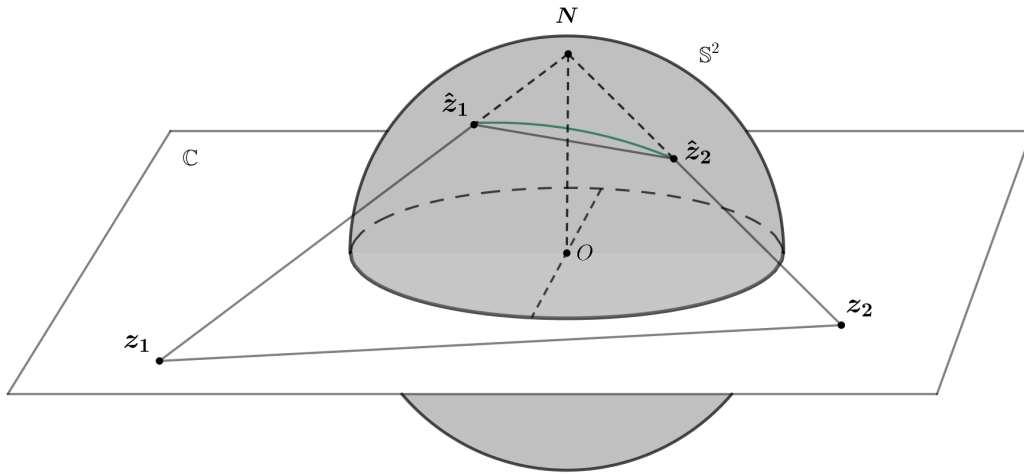


Fig. 3.5: Distância na esfera de Riemann.

Os triângulos  $Nz_1z_2$  e  $N\hat{z}_2\hat{z}_1$ , da Fig. 3.5, são semelhantes, pois possuem em comum o ângulo  $\hat{N}$  formado pelos lados proporcionais, assim

$$\frac{d(N, z_1)}{d(N, \hat{z}_2)} = \frac{d(z_1, z_2)}{d(\hat{z}_1, \hat{z}_2)}.$$

Resolvendo esta última equação em ordem a  $d(\hat{z}_1, \hat{z}_2)$  e levando em consideração que

$$d(N, z_1) = \sqrt{1 + |z_1|^2} \quad \text{e} \quad d(N, \hat{z}_2) = 2 / \sqrt{1 + |z_2|^2},$$

conclui-se o pretendido. □

**Definição 17.** *As circunferências que resultam da intersecção da esfera com planos que passam pela origem são chamadas geodésicas da esfera.*

Em vez da distância da corda às vezes é conveniente considerar a *distância esférica*,  $d_s$ , definida como sendo o comprimento do menor dos dois arcos determinados pelas imagens  $\hat{z}_1$  e  $\hat{z}_2$  de  $z_1$  e  $z_2$  na geodésica da esfera de Riemann que contém estes dois pontos [7]. Este arco está bem definido excepto quando os pontos  $\hat{z}_1$  e  $\hat{z}_2$  são diametralmente opostos, isto é, quando  $1 + \bar{z}_1 z_2 = 0$ . Neste caso, a distância esférica entre eles é igual a  $\pi$ .

**Proposição 11** (Distância esférica). *Seja  $g$  a geodésica da esfera que passa pelos pontos  $\hat{z}_1$  e  $\hat{z}_2$ , não diametralmente opostos. Se  $\zeta(\hat{z}_1) = z_1$  e  $\zeta(\hat{z}_2) = z_2$ , então*

$$d_s = \arctan \left| \frac{z_1 - z_2}{1 + \bar{z}_1 z_2} \right|.$$

*Demonstração.* Sejam  $d(\hat{z}_1, \hat{z}_2)$  a distância da corda,  $d_s(\hat{z}_1, \hat{z}_2)$  a distância esférica e  $\theta$  a medida, em radianos, do ângulo central  $\angle \hat{z}_1 O \hat{z}_2$ . Temos que  $d_s(\hat{z}_1, \hat{z}_2) = \theta$ . Vamos, a partir

de agora, omitir os argumentos das funções a fim de simplificar a escrita. Aplicando a lei dos cossenos no triângulo  $\hat{z}_1 O \hat{z}_2$  e tendo em conta que

$$1 - \cos(\theta) = \frac{2 \tan^2(\theta/2)}{1 + \tan^2(\theta/2)}$$

obtemos

$$\tan^2(d_s/2) = \frac{d^2}{4 - d^2} \quad (3.8)$$

Substituindo (3.7) na equação (3.8) e simplificando, vem

$$\tan^2(d_s/2) = \frac{|z_2 - z_1|^2}{|1 + \bar{z}_1 z_2|^2}.$$

Portanto,

$$d_s = 2 \arctan \left| \frac{z_2 - z_1}{1 + \bar{z}_1 z_2} \right|,$$

como pretendido. □

As noções que aqui apresentamos são mais do que suficientes para o uso nos capítulos seguintes. Para uma exposição mais completa e detalhada sobre esse assunto, o leitor poderá consultar [9] e [16].

## 3.2 Comportamento de funções no infinito

Nesta secção temos como objectivo definir funções holomorfas e meromorfas em  $\infty$ . Fazemos isso usando a bijecção  $I : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  dada por  $I(z) = z^{-1}$ , para cada  $z \neq 0, \infty$ , e definimos  $I(0) = \infty$  e  $I(\infty) = 0$ .

Sejam  $z = x + iy \in \mathbb{C} - \{0\}$  e  $w = I(z) = (x - iy)/z\bar{z}$ . Então o ponto  $\hat{z} = \zeta^{-1}(z) \in \mathbb{S}^2$  correspondente ao ponto  $z$  tem coordenadas

$$x_1 = \frac{2x}{z\bar{z} + 1}, \quad x_2 = \frac{2y}{z\bar{z} + 1}, \quad x_3 = \frac{z\bar{z} - 1}{z\bar{z} + 1}$$

em  $\mathbb{R}^3$ , e as coordenadas de  $\hat{w} = \zeta^{-1}(w)$  são

$$\begin{aligned} \hat{x}_1 &= \frac{2x(z\bar{z})^{-1}}{(z\bar{z})^{-1} + 1} = \frac{2x}{z\bar{z} + 1} = x_1, \\ \hat{x}_2 &= \frac{-2y(z\bar{z})^{-1}}{(z\bar{z})^{-1} + 1} = \frac{-2y}{z\bar{z} + 1} = -x_2, \\ \hat{x}_3 &= \frac{(z\bar{z})^{-1} - 1}{(z\bar{z})^{-1} + 1} = \frac{1 - z\bar{z}}{z\bar{z} + 1} = -x_3. \end{aligned}$$

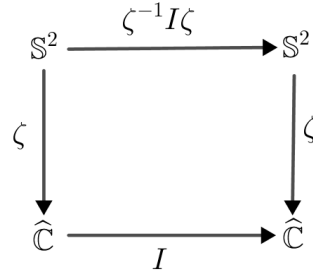


Fig. 3.6: Rotação induzida por  $I(z) = z^{-1}$ .

Assim,  $I$  induz a transformação  $\zeta^{-1}I\zeta : \hat{z} = (x_1, x_2, x_3) \mapsto \hat{w} = (x_1, -x_2, -x_3)$  de  $\mathbb{S}^2$ , e essa transformação define uma rotação de  $\mathbb{S}^2$  segundo o ângulo  $\pi$  em torno do eixo  $x_1$ .

**Definição 18.** O disco aberto de centro no infinito e raio  $r > 0$  é o conjunto  $D(\infty, r)$  dos números complexos cuja distância à origem é maior do que  $1/r$ . Ou seja,

$$D(\infty, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1/r\}.$$

Geometricamente, este conjunto identifica-se com o exterior da circunferência de centro 0 e raio  $1/r$ , pelo que é um subconjunto aberto de  $\mathbb{C}$ . Uma vizinhança de  $\infty$  é então qualquer conjunto que contenha  $D(\infty, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1/r\}$ , para algum  $r > 0$ .

Seja  $f(z)$  uma função definida em  $D - \{\infty\}$ , onde  $D$  é uma vizinhança de  $\infty$ . Estendamos  $f(z)$  ao domínio  $D$ , definindo

$$f(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} f(z),$$

desde que esse limite exista. Então  $f$  é contínua em  $\infty$ , e  $f(\infty) = \lim_{z \rightarrow 0} f(z^{-1}) = \lim_{z \rightarrow 0} (f \circ I)(z)$ .

Podemos estudar como uma função  $f$  se comporta no infinito, por meio da composição com a transformação  $I$ . Mais precisamente, tendo em conta a transformação  $\zeta^{-1}I\zeta$ , para estudarmos  $f(z)$  no infinito, estudamos  $(f \circ I)(z)$  na origem.

**Definição 19.** Uma função  $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  diz-se holomorfa (meromorfa) no  $\infty$  quando  $f \circ I$  for holomorfa (meromorfa) no ponto 0.

**Exemplo 2.** A função  $f(z) = (z^2 + 1)^{-1}$  é holomorfa e meromorfa no  $\infty$ , uma vez que a função  $(f \circ I)(z) = z^2(z^2 + 1)^{-1}$  é holomorfa e meromorfa no ponto zero.

**Definição 20.** Uma função racional  $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  é uma função da forma  $f(z) = p(z)/q(z)$ , onde  $p(z)$  e  $q(z)$  são polinômios com coeficientes complexos e  $q(z)$  não é identicamente nulo. Quando  $z \in \mathbb{C}$  e  $q(z) \neq 0$ ,  $f(z)$  é um elemento bem definido em  $\mathbb{C}$ . Por outro lado, quando  $q(z) = 0$  ou  $z = \infty$ , definimos  $f(z) = \lim_{w \rightarrow z} f(w)$ .

Para terminar esta secção enunciaremos um teorema e uma proposição cujas demonstrações podem ser encontradas em [9].

**Definição 21.** *Dois polinómios dizem-se co-primos quando não possuem raízes comuns.*

**Teorema 9.** *Uma função  $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  é racional se, e somente se, é meromorfa em  $\widehat{\mathbb{C}}$ .*

**Definição 22.** *Seja  $f = p/q$  uma função racional, com  $p$  e  $q$  polinómios co-primos. O grau de  $f$ , denotado por  $\deg(f)$ , é o máximo entre os graus de  $p$  e  $q$ .*

**Proposição 12.** *Uma função racional  $f$  é bijectiva se, e somente se,  $\deg(f) = 1$ .*

# Capítulo 4

## Transformações de Möbius

Neste capítulo estudaremos uma classe de transformações conformes: as transformações de Möbius, também conhecidas por transformações lineares fraccionárias ou homográficas, que possuem muito apelo geométrico e que gozam de notáveis atributos, que conduzem a resultados e aplicações importantes.

### 4.1 Automorfismos de $\widehat{\mathbb{C}}$

Considere a transformação  $T(z) = (az+b)(cz+d)^{-1}$  cujos coeficientes  $a, b, c, d$  são números complexos. Note-se que se  $ad - bc = 0$ , então  $T$  é uma transformação constante que aplica qualquer  $z$  no mesmo ponto imagem  $a/c$ , designando-se  $T$  *singular*. Suporemos doravante que  $T$  é não singular, ou seja,  $ad - bc \neq 0$ . Estendamos a transformação  $T$  ao plano complexo ampliado, definindo

$$T(-d/c) = \infty \quad T(\infty) = a/c,$$

onde  $T(\infty)$  pode ser interpretado como o limite de  $T$  quando  $z \rightarrow \infty$ . Em resumo, temos

**Definição 23.** *Uma transformação de Möbius é uma função de  $\widehat{\mathbb{C}}$  em  $\widehat{\mathbb{C}}$ , definida por*

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \tag{4.1}$$

onde  $a, b, c, d$  são constantes complexas satisfazendo  $ad - bc \neq 0$ .

**Definição 24.** *Uma transformação  $T : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  diz-se um automorfismo da esfera de Riemann quando  $T$  é uma bijecção meromorfa. Denotaremos por  $\text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$  o conjunto de todos os automorfismos de  $\widehat{\mathbb{C}}$ .*

O conjunto de todos os automorfismos da esfera de Riemann consiste, exclusivamente, das transformações de Möbius, conforme se prova no teorema que se segue. É fácil de ver que a recíproca também é verdadeira.

**Teorema 10.** Se  $T \in \text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$ , então  $T$  é uma transformação de Möbius.

*Demonstração.* Pelo Teorema 9 uma transformação  $T : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  é meromorfa se, e somente se, é racional, e pela Proposição 12 a transformação  $T$  é bijectiva se, e somente se, tiver grau igual a 1. Os automorfismos de  $\widehat{\mathbb{C}}$  são portanto as transformações  $T(z) = (az + b)/(cz + d)$  onde  $az + b$  e  $cz + d$  são polinómios co-primos, isto é,  $ad - bc \neq 0$ .  $\square$

**Observação 5.** As constantes  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  da transformação de Möbius (4.1) não são únicos, ou seja, se  $k$  é um número complexo não nulo, então

$$T(z) = \frac{kaz + kb}{kcz + kd} = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \lambda'} \quad (4.2)$$

onde os novos coeficientes  $\alpha, \beta, \gamma, \lambda' \in \mathbb{C}$  satisfazem a condição:  $\alpha\lambda - \beta\gamma = k^2(ad - bc) \neq 0$ .

**Nota 7.** Se em (4.2), definirmos  $k = \pm 1/\sqrt{ad - bc}$  então  $\alpha\lambda - \beta\gamma = 1$ . Neste caso dizemos que (4.1) é uma transformação de Möbius normalizada.

**Teorema 11** (Grupo das transformações de Möbius). O conjunto das transformações de Möbius, munido da composição de funções é um grupo.

*Demonstração.* Se  $T_1(z) = (az + b)/(cz + d)$  e  $T_2(z) = (a'z + b')/(c'z + d')$  são transformações de Möbius, então  $T_2 \circ T_1$  é também uma transformações Möbius

$$(T_2 \circ T_1)(z) = \frac{(aa' + b'c)z + (a'b + b'd)}{(c'a + d'c)z + (c'b + d'd)}$$

onde  $(aa' + b'c)(c'b + d'd) - (c'a + d'c)(a'b + b'd) = (a'd' - b'c')(ad - bc) \neq 0$ . A transformação identidade  $I(z) = z$ , tem  $a = d \neq 0$ , e a inversa de (4.1) é a transformação (de Möbius)  $T^{-1}(z) = (dz - b)/(-cz + a)$ . Como a composição de funções é associativa, a demonstração, fica, assim concluída.  $\square$

**Corolário 3.** O conjunto  $\text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$  é um grupo de homeomorfismo de  $\widehat{\mathbb{C}}$  em  $\widehat{\mathbb{C}}$ .

*Demonstração.* Acabamos de mostrar que  $\text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$  é um grupo. Se  $T \in \text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$  então, sendo meromorfa,  $T$  é contínua. Como  $T^{-1} \in \text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$ ,  $T^{-1}$  também é contínua, logo  $T$  é um homeomorfismo de  $\widehat{\mathbb{C}}$  em  $\widehat{\mathbb{C}}$ .  $\square$

Existe uma conexão entre as transformações de Möbius e as matrizes  $(2 \times 2)$  com entradas complexas: se  $T_1$  e  $T_2$  são expressos na forma acima, e se  $M$  e  $N$  são as matrizes correspondentes

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix},$$

então  $T_2 \circ T_1$  corresponde ao produto

$$MN = \begin{bmatrix} aa' + b'c & a'b + b'd \\ c'a + d'c & c'b + d'd \end{bmatrix}.$$

Mais precisamente, seja  $GL(2, \mathbb{C})$  o grupo linear geral, que consiste, de todas as matrizes complexas  $2 \times 2$

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

com  $\det(M) = ad - bc \neq 0$ , e para cada  $M \in GL(2, \mathbb{C})$ , seja  $\psi(M)$  a transformação de Möbius  $T_1(z) = (az + b)/(cz + d)$ . Então  $\psi(MN) = T_2 \circ T_1 = \psi(N) \circ \psi(M)$ , de modo que

$$\psi : GL(2, \mathbb{C}) \rightarrow \text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

define um homomorfismo sobrejectivo de grupos. O núcleo  $N(\psi)$  consiste das matrizes  $M \in GL(2, \mathbb{C})$  tais que  $T(z) = z$ , para todo  $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ , ou equivalentemente,  $a = d \neq 0$  e  $b = c = 0$ , portanto  $N(\psi)$  consiste das matrizes

$$M = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda I, \quad (\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}).$$

**Nota 8.** Duas matrizes  $M, N \in GL(2, \mathbb{C})$  determinam o mesmo automorfismo de  $\widehat{\mathbb{C}}$  se e somente se  $M^{-1}N \in N(\psi)$ , isto é,  $N = \lambda M$  para algum  $\lambda \neq 0$ . Aplicando o primeiro teorema do isomorfismo a  $\psi$ , obtemos

$$\text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}}) \simeq GL(2, \mathbb{C})/N(\psi).$$

**Definição 25.** O grupo quociente  $GL(2, \mathbb{C})/N(\psi)$  chama-se grupo geral linear projectivo e é denotado por  $PGL(2, \mathbb{C})$ .

Uma vez que  $\det(MN) = \det(M)\det(N)$  para todo  $M, N \in GL(2, \mathbb{C})$ , a função

$$\det : GL(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C} - \{0\}$$

define um homomorfismo, cujo núcleo é um subgrupo normal de  $GL(2, \mathbb{C})$ , o grupo linear especial, denotado por  $SL(2, \mathbb{C})$ , formado pelas matrizes  $M \in GL(2, \mathbb{C})$  tais que  $\det(M) = 1$ . Como  $\det$  é uma função sobrejectiva, temos

$$GL(2, \mathbb{C})/SL(2, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C} - \{0\}.$$

**Observação 6.** Se  $N \in GL(2, \mathbb{C})$ , então podemos escrever  $N = \lambda M$ , onde  $\lambda^2 = \det(N)$  e  $M \in SL(2, \mathbb{C})$ . Como  $\psi(N) = \psi(M)$ , isto mostra que todo automorfismo de  $\widehat{\mathbb{C}}$  tem a forma

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \text{com } ad - bc = 1;$$

de modo equivalente,  $\psi$  aplica, sobrejectivamente,  $SL(2, \mathbb{C})$  em  $\text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$ .

Assim, o grupo  $PGL(2, \mathbb{C})$  coincide com o grupo  $PSL(2, \mathbb{C}) := SL(2, \mathbb{C})/\{\pm I\}$ , chamado grupo linear especial projectivo, e provamos:

**Teorema 12.**  $\text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}}) \simeq PGL(2, \mathbb{C}) = PSL(2, \mathbb{C})$ .

## 4.2 Os geradores de $PGL(2, \mathbb{C})$

Nesta secção mostraremos que toda transformação de Möbius exprime-se à custa das seguintes transformações: identidade, rotações, translações, homotetias e inversões. Usando este facto mostraremos também, que as transformações de Möbius transformam “circunferências” em “circunferências”.

**Definição 26.** *Uma circunferência na esfera  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$  é a intersecção  $\mathbb{S}^2 \cap \pi$ , onde  $\pi$  é um plano em  $\mathbb{R}^3$  que intersecta  $\mathbb{S}^2$  mas não é tangente a ela.*

Usando a bijecção  $\zeta : \mathbb{S}^2 \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ , definimos uma circunferência em  $\widehat{\mathbb{C}}$  como sendo a imagem estereográfica pela  $\zeta$  de qualquer circunferência em  $\mathbb{S}^2$ .

**Observação 7.** *Atendendo que no plano complexo uma recta pode ser caracterizado por  $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = |z - z_1|\}$  e uma circunferência por  $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$ , onde  $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$  e  $r > 0$ , não é difícil de se mostrar que os dois casos se podem englobar na representação única*

$$\alpha z \bar{z} + cz + \bar{c} \bar{z} + \beta = 0, \quad (4.3)$$

com  $\alpha$  e  $\beta$  reais ( $\alpha\beta < |c|^2$ ) e sendo  $\alpha = 0$  ou  $\alpha \neq 0$  conforme se trate, respectivamente, de uma recta ou de uma circunferência de centro  $z_0 = -\bar{c}/\alpha$  e raio  $r = \sqrt{|c|^2 - \alpha\beta}/|\alpha|$ .

Assim, as circunferências em  $\widehat{\mathbb{C}}$  são de dois tipos: circunferências em  $\mathbb{C}$  (no sentido usual do termo) e os conjuntos da forma  $l \cup \{\infty\}$ , onde  $l$  é uma recta em  $\mathbb{C}$ .

**Nota 9.** *Muitas das funções familiares são transformações de Möbius. Por exemplo, na expressão (4.1),*

- (i) *fazendo  $a = d = 1$ ,  $c = 0$  e  $b \neq 0$ , definimos a translação segundo o vector  $b$ ;*
- (ii) *para  $d = 1$ ,  $a \neq 0$  e  $b = c = 0$ , obtemos uma rotação se  $|a| = 1$ , ou uma rotação seguida de uma homotetia se  $|a| \neq 1$ ;*
- (iii) *tomando  $a = d = 0$  e  $b = c = 1$ , definimos a chamada inversão complexa:  $z \mapsto 1/z$ .*

O próximo teorema mostra que as transformações de Möbius definidas nos exemplos acima geram  $PGL(2, \mathbb{C})$ , e é um análogo da conhecida propriedade da Geometria Euclidiana bidimensional, segundo a qual todo o movimento rígido é uma composição de translações, rotações e reflexões [3].

**Teorema 13** (Caracterização das transformações de Möbius). *Uma transformação de Möbius ou é: a identidade, uma translação, uma rotação, uma rotação seguida de uma homotetia, uma inversão complexa, ou então pode exprimir-se como a composição de transformações destes tipos.*

*Demonstração.* Consideremos uma transformação de Möbius  $T$  da forma (4.1). Suponhamos, primeiramente, que  $c \neq 0$ . A transformação  $T$  pode ser escrita na forma

$$T(z) = \frac{a}{c} - \frac{ad - bc}{c} \cdot \frac{1}{cz + d}.$$

É imediato constatar que  $T$  resulta da composição das seguintes transformações:

- (i)  $z \mapsto cz$  (rotação seguida de uma homotetia);
- (ii)  $z \mapsto z + d$  (translação);
- (iii)  $z \mapsto \frac{1}{z}$  (inversão);
- (iv)  $z \mapsto -\frac{ad - bc}{c}z$  (nova rotação seguida de uma homotetia);
- (v)  $z \mapsto z + \frac{a}{c}$  (nova translação);

Suponhamos, agora, que  $c = 0$ . A condição  $ad - bc \neq 0$  garante que  $ad \neq 0$ , ou seja,  $a \neq 0$  e  $d \neq 0$ . Nestas condições, a transformação  $T$  resulta da composição de:

- (i)  $z \mapsto z + \frac{b}{d}$  (translação);
- (ii)  $z \mapsto \frac{a}{d}z$  (rotação e homotetia).

A demonstração fica, assim, concluída. □

**Lema 3.** *A inversão complexa  $z \mapsto 1/z$  transforma circunferências em circunferências.*

*Demonstração.* A equação de uma recta ou de uma circunferência no plano complexo pode ser escrita na forma

$$\alpha z\bar{z} + cz + \bar{c}\bar{z} + \beta = 0,$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são números reais. Esta equação define uma recta se  $\alpha = 0$  e  $c \neq 0$ , e uma circunferência se  $\alpha \neq 0$  e  $\alpha\beta < |c|^2$ . Para encontrarmos a imagem da curva dada pela equação (4.3), sob a transformação  $w = 1/z$ , substituímos  $z$  por  $1/w$  em (4.3), e após simplificar obtemos

$$\beta w\bar{w} + c\bar{w} + \bar{c}w + \alpha = 0. \tag{4.4}$$

A equação (4.4) tem a mesma forma que a equação (4.3), sendo uma recta se  $\beta = 0$  e uma circunferência se  $\beta \neq 0$ . Mais precisamente, temos quatro casos a considerar. Esses se encontram resumidos na tabela abaixo:

$z$	$1/z$
circunferência que não passa pela origem	circunferência que não passa pela origem
circunferência que passa pela origem	recta que não passa pela origem
recta que não passa pela origem	circunferência que passa pela origem
recta que passa pela origem	recta que passa pela origem

A demonstração fica, assim concluída. □

**Exemplo 3.** De acordo com as equações (4.3) e (4.4), a imagem de uma recta vertical  $x = c_1$ , ( $c_1 \neq 0$ ), por meio da inversão  $w = 1/z$  é uma circunferência definida por

$$\left(u - \frac{1}{2c_1}\right)^2 + v^2 = \left(\frac{1}{2c_1}\right)^2, \tag{4.5}$$

que tem o centro no eixo  $u$  e é tangente ao eixo  $v$ . As circunferências (4.5) encontram-se à direita ou à esquerda do eixo  $v$ , conforme  $c_1 > 0$  ou  $c_1 < 0$ , respectivamente. Analogamente, a imagem de uma recta horizontal  $y = c_2$ , ( $c_2 \neq 0$ ), por meio da inversão  $w = 1/z$  é uma circunferência definida por

$$u^2 + \left(v + \frac{1}{2c_2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2c_2}\right)^2,$$

com centro no eixo  $v$ , e é tangente ao eixo  $u$ . Os dois casos são ilustrados na figura 4.1.

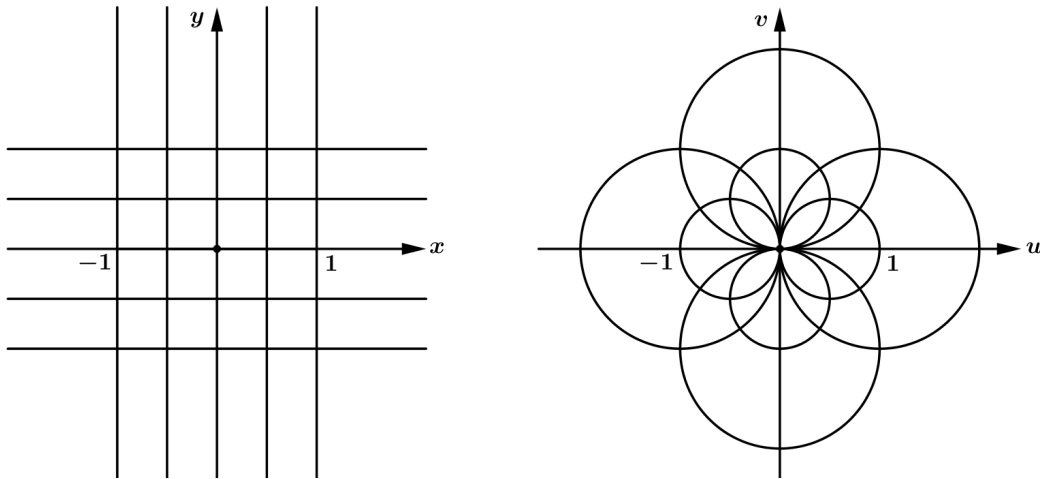


Fig. 4.1: Inversão de feixes de rectas.

**Teorema 14.** Seja  $C$  uma circunferência em  $\widehat{\mathbb{C}}$ . Se  $T$  é uma transformação de Möbius, então  $T(C)$  é uma circunferência em  $\widehat{\mathbb{C}}$ .

*Demonstração.* A propriedade do enunciado é claramente válida para cada uma das transformações de Möbius nucleares: translações, rotações, rotações seguida de uma homotetia e inversões. Resta, então, aplicar o Teorema 13. □

### 4.3 Razão cruzada

Começemos por averiguar quais os pontos fixos de uma transformação de Möbius  $T$ , ou seja, quais os pontos  $z$  satisfazem  $T(z) = z$ . Se  $z$  satisfaz esta equação, então

$$cz^2 + (d - a)z - b = 0.$$

A equação anterior tem uma infinidade de soluções (todo o plano complexo ampliado) quando  $c = 0$ ,  $d = a \neq 0$  e  $b = 0$ , isto é, quando  $T$  é a identidade. Contudo, se considerarmos uma transformação de Möbius  $T$  diferente da identidade,  $T$  tem apenas um ou dois pontos fixos, consoante a equação anterior tenha uma raiz dupla ou duas raízes distintas. A única situação em que, aparentemente, a equação não tem soluções é quando  $c = 0$ ,  $d = a$  e  $b \neq 0$ . Mas, nestas condições, temos uma translação da forma  $z \mapsto z + b/d$ , que tem um único ponto fixo ( $\infty$ ).

O teorema a seguir mostra que uma transformação de Möbius fica unicamente determinada pela sua acção em três quaisquer pontos distintos de  $\widehat{\mathbb{C}}$ . Mais precisamente:

**Teorema 15.** *Se  $(z_1, z_2, z_3)$  e  $(w_1, w_2, w_3)$  são ternos de pontos distintos em  $\widehat{\mathbb{C}}$ , então existe uma única transformação de Möbius  $T$  tal que  $T(z_j) = w_j$  para  $j = 1, 2, 3$ .*

*Demonstração.* Seja  $T$  uma transformação de Möbius e sejam  $z_1, z_2, z_3$  três pontos distintos em  $\widehat{\mathbb{C}}$ , com  $T(z_1) = w_1$ ,  $T(z_2) = w_2$ ,  $T(z_3) = w_3$ . Suponhamos que  $M$  é outra transformação de Möbius com a mesma propriedade, isto é,  $M(z_j) = w_j$ , para  $j = 1, 2, 3$ . Então,  $M^{-1}T$  tem três pontos fixos  $z_1, z_2$  e  $z_3$ , pelo que  $M^{-1}T$  só pode ser a identidade.  $\square$

**Corolário 4.** *Se  $z_1, z_2$  e  $z_3$  são três pontos distintos de  $\widehat{\mathbb{C}}$ , então existe uma única transformação de Möbius  $T$ , definida por*

$$T(z) = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)}, \quad (4.6)$$

que aplica  $z_1, z_2, z_3$ , respectivamente, em  $0, 1, \infty$ .

*Demonstração.* Se  $z_1, z_2, z_3 \neq \infty$  são três pontos distintos de  $\widehat{\mathbb{C}}$ , então a transformação de Möbius  $T$ , definida por (4.6) aplica  $z_1, z_2, z_3$ , respectivamente, em  $0, 1, \infty$ , como facilmente se verifica. Se algum  $z_j = \infty$ , tomamos o limite da transformação (4.6) quando  $z_j \rightarrow \infty$ : se  $z_1 = \infty$  tomamos  $T(z) = (z_2 - z_3)/(z - z_3)$ ; se  $z_2 = \infty$  tomamos  $T(z) = (z - z_1)/(z - z_3)$ ; se  $z_3 = \infty$  então  $T(z) = (z - z_1)/(z_2 - z_1)$ . Em cada um desses casos,  $T$  define uma transformação de Möbius e aplica  $z_1, z_2, z_3$ , respectivamente, em  $0, 1, \infty$ .  $\square$

**Exemplo 4.** *Vimos que, se uma transformação de Möbius  $T$  fixa três pontos distintos de  $\widehat{\mathbb{C}}$ , então  $T$  é a identidade. Isso mostra, por exemplo, que não existe nenhuma transformação de Möbius que aplica  $0, 1, \infty, 2$  em  $0, 1, \infty, -1$ , respectivamente.*

Para cada  $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ , denota-se (4.6) por  $(z, z_1; z_2, z_3)$ . A função  $T$  é a única transformação de Möbius que aplica os pontos  $z_1, z_2, z_3$ , respectivamente, em  $0, 1, \infty$ .

**Definição 27.** Para cada  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,

$$(z_0, z_1; z_2, z_3)$$

é chamada razão cruzada de complexos e é a imagem de  $z_0$  pela única transformação de Möbius que aplica  $z_1, z_2, z_3$ , respectivamente, em  $0, 1, \infty$ .

A razão cruzada é invariante para transformações de Möbius. Mais precisamente:

**Teorema 16** (Invariância da razão cruzada). Se  $z_0, z_1, z_2, z_3$  são quatro pontos distintos em  $\widehat{\mathbb{C}}$  e  $T$  é uma transformação de Möbius qualquer, então

$$(T(z_0), T(z_1); T(z_2), T(z_3)) = (z_0, z_1; z_2, z_3).$$

*Demonstração.* Sejam  $z_0, z_1, z_2, z_3$  pontos distintos e arbitrários em  $\widehat{\mathbb{C}}$ . Considere-se a transformação de Möbius  $S(z) = (z, z_1; z_2, z_3)$ , que aplica  $z_1, z_2, z_3$ , respectivamente, em  $0, 1, \infty$ . Ora,  $ST^{-1}$  transforma  $T(z_1), T(z_2), T(z_3)$ , respectivamente, em  $0, 1, \infty$ . Desta forma

$$(T(z_0), T(z_1); T(z_2), T(z_3)) = ST^{-1}(T(z_0)) = S(z_0) = (z_0, z_1; z_2, z_3),$$

o que prova o pretendido. □

Esta propriedade permite conhecer a (única) transformação de Möbius  $T$  que leva três pontos distintos  $z_1, z_2, z_3$  para as posições distintas  $w_1, w_2, w_3$ , designadamente

$$(z, z_1; z_2, z_3) = (T(z), T(z_1); T(z_2), T(z_3)) = (w, w_1; w_2, w_3).$$

A transformação de Möbius  $T$  é obtida resolvendo a equação  $(z, z_1; z_2, z_3) = (w, w_1; w_2, w_3)$  em ordem a  $w$ ,

$$\begin{aligned} \frac{(w - w_1)(w_2 - w_3)}{(w - w_3)(w_2 - w_1)} &= \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)} \\ w - w_1 &= (w - w_3) \frac{z - z_1}{z - z_3} \sigma \end{aligned}$$

onde

$$\sigma = \frac{(z_2 - z_3)(w_2 - w_1)}{(z_2 - z_1)(w_2 - w_3)}.$$

Simplificando a expressão acima obtemos,

$$T(z) = \frac{(w_1 - \sigma w_3)z + \sigma z_1 w_3 - w_1 z_3}{(1 - \sigma)z - z_3 + \sigma z_1}.$$

**Exemplo 5.** Determinemos a transformação de Möbius que leva a circunferência unitária  $|z| = 1$  no eixo real. Sejam  $z_1 = 1, z_2 = i$  e  $z_3 = -1$  três pontos distintos na circunferência unitária e  $w_1 = -1, w_2 = 0$  e  $w_3 = 1$  três pontos distintos no eixo real.

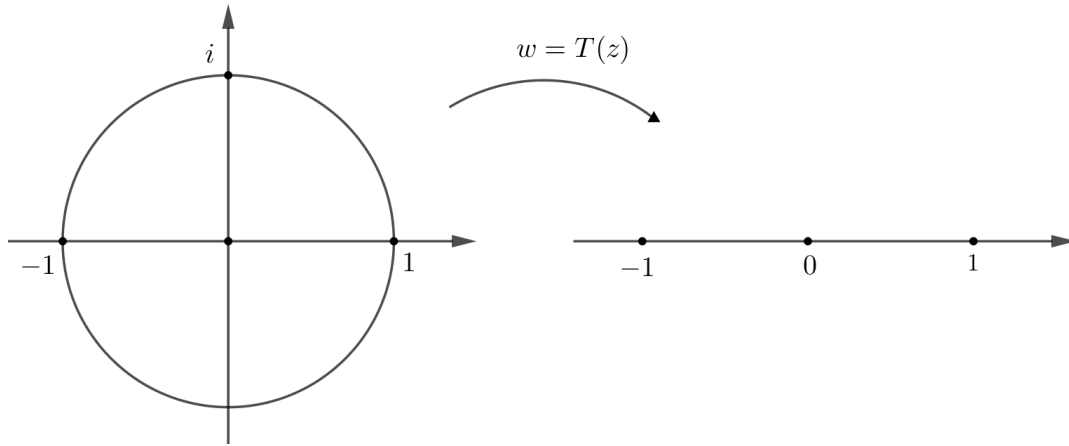


Fig. 4.2: Aplicação da circunferência unitária no eixo real.

Segundo a última equação, acima, se  $w_j = T(z_j)$ , ( $j = 1, 2, 3$ ), é a transformação de Möbius que procuramos, então

$$T(z) = \frac{(-1-i)z + i - 1}{(1-i)z + i + 1} = \frac{z - i}{iz - 1}.$$

**Teorema 17.** Se  $C$  é uma circunferência que passa por três pontos distintos  $z_1, z_2, z_3 \in \widehat{\mathbb{C}}$ , então  $C = \{z \in \widehat{\mathbb{C}} : (z, z_1; z_2, z_3) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}\}$ .

*Demonstração.* Seja  $T$  uma transformação de Möbius onde  $T(z_1) = 0$ ,  $T(z_2) = 1$ ,  $T(z_3) = \infty$ . Nessas condições  $T(z) = (z, z_1; z_2, z_3)$  e  $z \in C$  se, e somente se,  $(z, z_1; z_2, z_3) \in T(C)$ . Como a imagem  $T(C)$  é uma circunferência que passa pelos pontos  $0, 1, \infty$ , tem-se  $T(C) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ , conforme pretendido.  $\square$

Vamos interpretar esse resultado geometricamente. Suponhamos que  $\infty \notin C$ , de modo que  $C$  é uma circunferência euclidiana em  $\mathbb{C}$ . Seja  $\theta$  o ângulo entre os vectores  $z - z_1$  e  $z - z_3$  e  $\phi$  o ângulo entre  $z_2 - z_1$  e  $z_2 - z_3$ . Uma vez que

$$\omega = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z_1 - z_2)(z_3 - z)} = \frac{(z - z_1)}{(z - z_3)} \div \frac{(z_2 - z_1)}{(z_2 - z_3)}$$

temos

$$\begin{aligned} \arg(\omega) &= (\arg(z - z_1) - \arg(z - z_3)) - (\arg(z_2 - z_1) - \arg(z_2 - z_3)) \\ &= \theta - \phi, \end{aligned}$$

então o teorema expressa o resultado (familiar na geometria euclidiana) que os pontos  $z, z_1, z_2, z_3$  são concíclicos (estão numa mesma circunferência) se, e somente se,  $\theta = \phi$ , ou equivalentemente, que um quadrilátero é cíclico (os seus vértices estão numa mesma circunferência) se, e somente se, possui um par de ângulos opostos suplementares (Fig. 4.3 ilustra os dois casos).

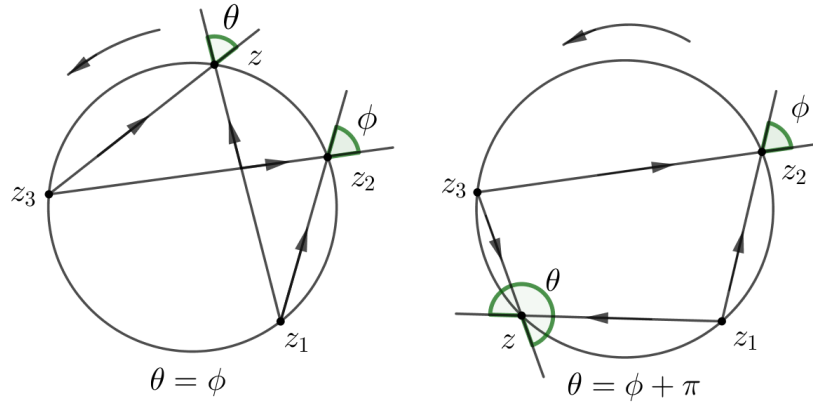


Fig. 4.3: Caracterização das circunferências em  $\widehat{\mathbb{C}}$ .

Se  $\infty \in C$ , então  $C - \{\infty\}$  é uma recta euclidiana em  $\mathbb{C}$ , e o teorema expressa uma condição para os pontos  $z, z_1, z_2, z_3$  serem colineares.

## 4.4 Inversão geométrica

Nesta secção abordaremos o conceito de inversão geométrica e algumas das suas propriedades básicas. Para maior desenvolvimento desta temática recomenda-se a leitura do capítulo 6, secção 5 de [3]. As figuras aqui representadas são meras reproduções das referências [3] e [12].

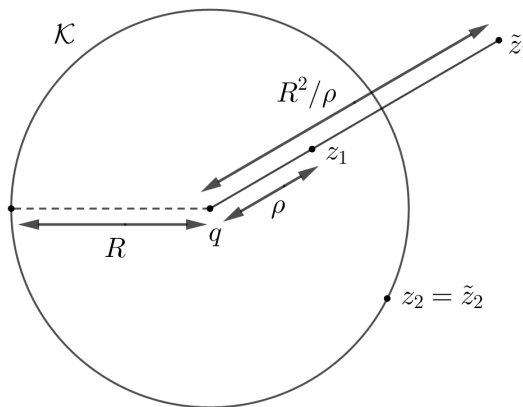


Fig. 4.4: Inversão geométrica numa circunferência  $\mathcal{K}(q, R)$ , com  $\rho = |z_1 - q|$  e  $|z_2 - q| = R$ .

**Definição 28.** *Seja  $\mathcal{K}$  uma circunferência de raio  $R$  e centro  $q$ . O inverso geométrico de um ponto  $z \in \mathbb{C} - \{q\}$  em relação à circunferência  $\mathcal{K}$  é o ponto  $\tilde{z}$  pertencente à semi-recta  $qz$  tal que*

$$|z - q| |\tilde{z} - q| = R^2. \quad (4.7)$$

A transformação que aplica cada ponto  $z$  no ponto  $\tilde{z}$ , que se representa por  $\mathcal{I}_{\mathcal{K}}$ , chama-se inversão geométrica.

**Observação 8.** Quando  $z \rightarrow q$ ,  $\tilde{z} \rightarrow \infty$ , e quando  $z \rightarrow \infty$ ,  $\tilde{z} \rightarrow q$ , assim estendemos  $\mathcal{I}_{\mathcal{K}}$  ao plano complexo ampliado, tomando  $\mathcal{I}_{\mathcal{K}}(q) = \infty$  e  $\mathcal{I}_{\mathcal{K}}(\infty) = q$ . Tem-se que  $\mathcal{I}_{\mathcal{K}}^2$  é a transformação identidade, e  $\mathcal{I}_{\mathcal{K}}(z) = z$  se, e somente se,  $z \in \mathcal{K}$ .

A proposição a seguir nos dá uma fórmula explícita para a inversão geométrica, numa circunferência de centro  $q$  e raio  $R$ .

**Proposição 13.** Seja  $\mathcal{K}$  uma circunferência de raio  $R$  e centro  $q$ . Se  $z \neq q, \infty$ , então

$$\tilde{z} = \mathcal{I}_{\mathcal{K}}(z) = q + \frac{R^2}{\bar{z} - \bar{q}}. \quad (4.8)$$

*Demonstração.* Para  $z \neq q, \infty$ , tem-se  $|(\bar{z} - \bar{q})(\tilde{z} - q)| = |z - q||\tilde{z} - q| = R^2$ . Uma vez que  $\arg(z - q) = \arg(\tilde{z} - q)$ , segue-se que  $\arg(\bar{z} - \bar{q})(\tilde{z} - q) = 0$  e, portanto,  $(\bar{z} - \bar{q})(\tilde{z} - q) = R^2$ . Resolvendo esta última equação em ordem a  $\tilde{z}$ , obtém-se o pretendido.  $\square$

**Nota 10.** Tendo em conta a Observação 7 temos que  $q = -\bar{c}/\alpha$  e  $R^2 = (c\bar{c} - \alpha\beta)/\alpha^2$  e, portanto, podemos reescrever a equação (4.8) na forma:

$$\tilde{z} = \mathcal{I}_{\mathcal{K}}(z) = -\frac{\bar{c}\bar{z} + \beta}{\alpha\bar{z} + c}.$$

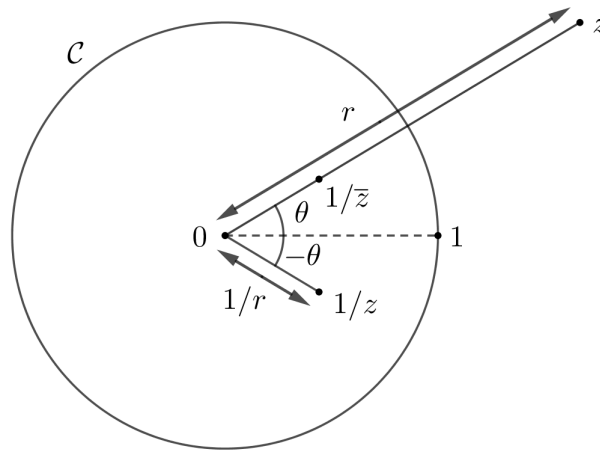


Fig. 4.5: Inversão geométrica numa circunferência  $C$  de centro  $0$  e raio  $1$ .

**Observação 9.** Em particular, se  $q$  é a origem e  $R = 1$ , a expressão (4.8) se escreve como  $\mathcal{I}_{\mathcal{K}}(z) = 1/\bar{z}$ . A imagem de um ponto  $z = re^{i\theta}$  por uma inversão complexa é

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\theta},$$

pelo que o módulo é o inverso do inicial e o argumento simétrico (veja-se a Fig. 4.5). Observe-se que um ponto no exterior da circunferência é transformado, pela inversão complexa, num ponto no seu interior, e vice-versa.

A Fig. 4.5 ilustra a forma de decompor a inversão complexa em duas transformações, num processo com dois passos sucessivos:

- 1) (inversão geométrica) transformar  $z = r e^{i\theta}$  no ponto na mesma direcção de  $z$  mas com módulo inverso, designadamente o ponto  $\frac{1}{r} e^{i\theta} = 1/\bar{z}$ .
- 2) (reflexão) Tomar o complexo conjugado (isto é, aplicar a reflexão no eixo real), que transforma  $1/\bar{z}$  em  $1/z$ .

Usando a equação (4.7), podemos obter  $\tilde{z}$  a partir de  $z$  (quando  $z$  está no interior de  $\mathcal{K}$ ) como a seguir se descreve: seja  $L$  a recta definida por  $q$  e  $z$ . Constrói-se a perpendicular a  $L$  em  $z$  e no ponto onde esta intersecta  $\mathcal{K}$  considera-se a tangente a  $\mathcal{K}$ . O ponto de intersecção desta tangente com  $L$  é o ponto  $\tilde{z}$ , como facilmente se prova por semelhança de triângulos (veja-se a Fig. 4.6). Portanto, o infinito é o inverso de  $q$  em relação a  $\mathcal{K}$ .

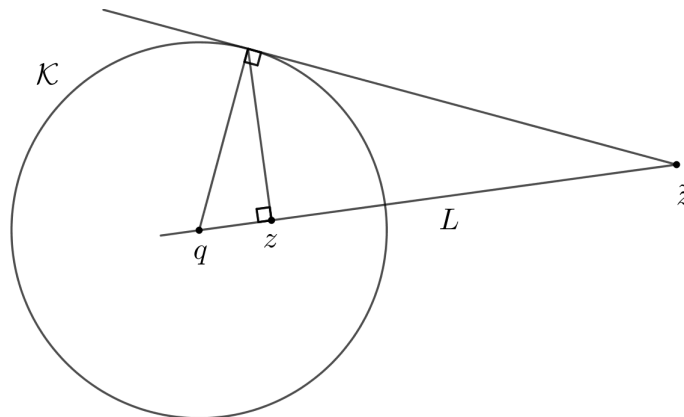


Fig. 4.6: Determinação do inverso geométrico de um ponto  $z$  no interior de  $\mathcal{K}$ .

Há uma interessante analogia entre a inversão numa circunferência  $\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{I}_{\mathcal{K}}$ , e a reflexão numa recta  $L$ ,  $\sigma_L$ . Ora,

- 1)  $L$  divide o plano em duas componentes, que são permutadas entre si por  $\sigma_L$ ;
- 2) cada ponto de  $L$  permanece fixo;
- 3) a reflexão é *involutiva*, ou seja, inversa de si mesma:  $\sigma_L^2 = id$ .

Quer isto dizer que o ponto  $z$  e a sua reflexão  $\sigma_L(z)$  são *simétricos* em relação a  $L$ .

**Nota 11.** A inversão geométrica numa circunferência goza destas três propriedades da reflexão numa recta. Por isso, costuma também designar-se reflexão numa circunferência dizendo-se os pontos  $z$  e  $\tilde{z} = \mathcal{I}_{\mathcal{K}}(z)$  *simétricos* relativamente à circunferência.

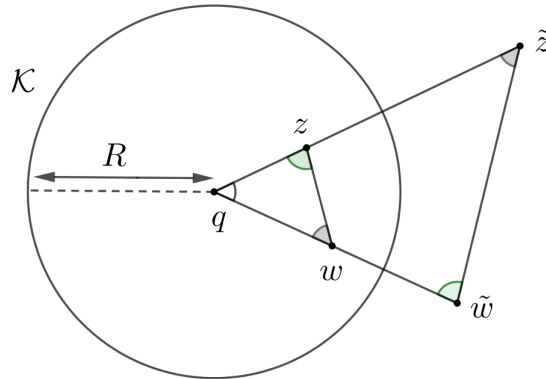


Fig. 4.7: Figura ilustrativo da Proposição 14.

Deduz-se, de seguida, duas propriedades elementares da inversão geométrica.

**Proposição 14.** *Se a inversão numa circunferência de centro  $q$  e raio  $R$  transforma  $z$  e  $w$ , respectivamente, em  $\tilde{z}$  e  $\tilde{w}$ , então os triângulos  $\Delta zqw$  e  $\Delta \tilde{z}q\tilde{w}$  são semelhantes.*

*Demonstração.* Nas condições da proposição e por definição de inversão, vem

$$|q - z||q - \tilde{z}| = R^2 = |q - w||q - \tilde{w}|.$$

Portanto,

$$\frac{|q - z|}{|q - w|} = \frac{|q - \tilde{w}|}{|q - \tilde{z}|}.$$

Notando que o ângulo  $\angle(wqz)$  é congruente com o ângulo  $\angle(\tilde{w}q\tilde{z})$  (veja-se a Fig. 4.7), fica estabelecida a propriedade.  $\square$

**Corolário 5.** *Se  $z$  e  $w$  são dois pontos arbitrários e  $\tilde{z} = \mathcal{I}_{\mathcal{K}}(z)$  e  $\tilde{w} = \mathcal{I}_{\mathcal{K}}(w)$  suas respectivas imagens sob a inversão em relação a  $\mathcal{K}$ , então a distância entre  $\tilde{z}$  e  $\tilde{w}$  é dada por*

$$|\tilde{z} - \tilde{w}| = \frac{R^2}{|q - z||q - w|} |z - w|. \quad (4.9)$$

*Demonstração.* Com efeito, usando a Proposição 14 e o facto de, em triângulos semelhantes, a ângulos geometricamente iguais se oporem lados de comprimentos proporcionais (veja-se a Fig 4.7), obtém-se a relação entre a distância entre dois pontos  $|z - w|$  e a distância entre as suas imagens  $|\tilde{z} - \tilde{w}|$ :

$$\frac{|\tilde{z} - \tilde{w}|}{|z - w|} = \frac{|q - \tilde{w}|}{|q - z|} = \frac{R^2}{|q - z||q - w|},$$

conforme pretendido.  $\square$

Vamos, agora, examinar os efeitos da inversão geométrica,  $\mathcal{I}_{\mathcal{K}}$ , em rectas e circunferências. Esses efeitos podem ser visualizados utilizando um programa de geometria dinâmica, como por exemplo o Geogebra.

**Observação 10.** Consideremos uma recta  $L$  que passa pelo centro  $q$  de uma circunferência  $\mathcal{K}$ . Pela definição de inversão é claro que  $\mathcal{I}_{\mathcal{K}}$  aplica a recta  $L$  nela mesma, o que podemos escrever como  $\mathcal{I}_{\mathcal{K}}(L) = L$ . Dessa forma,  $\mathcal{I}_{\mathcal{K}}$  troca as partes de  $L$  interiores e exteriores a  $\mathcal{K}$  e os únicos pontos de  $L$  que permanecem fixos são os dois pontos onde  $L$  intersecta  $\mathcal{K}$ .

A proposição a seguir nos diz o que acontece com uma recta  $L$  que não passa pelo centro  $q$  de  $\mathcal{K}$  ao ser invertida em relação à  $\mathcal{K}$  (veja-se a Fig. 4.8).

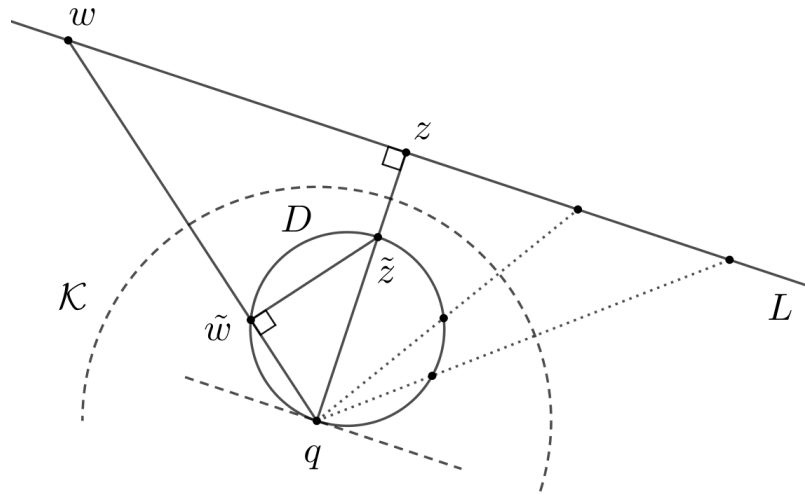


Fig. 4.8: A inversão na circunferência  $\mathcal{K}$  de uma recta  $L$  que não passa pelo centro  $q$  de  $\mathcal{K}$ .

**Proposição 15.** A inversão de uma recta  $L$ , que não passa por  $q$ , numa circunferência de centro  $q$  e raio  $R$  é  $D - \{q\}$ , onde  $D$  é uma circunferência que passa por  $q$  e que tem centro na perpendicular a  $L$  que passa por  $q$ .

*Demonstração.* Sejam  $w$  um ponto arbitrário pertencente a recta  $L$  e  $z$  o ponto de intersecção de  $L$  com a recta perpendicular passando por  $q$ . Da Proposição 14 temos que  $\angle(q\tilde{w}\tilde{z}) = \angle(qzw) = \pi/2$ . Portanto,  $\tilde{w}$  pertence à circunferência  $D - \{q\}$ , onde o segmento de recta  $q\tilde{z}$  é o seu diâmetro.  $\square$

**Corolário 6.** Se  $D$  for uma circunferência que passa por  $q$ , então a inversa de  $D - \{q\}$  numa circunferência  $\mathcal{K}$  de centro  $q$  e raio  $R$  é uma recta perpendicular à recta  $qA$ , em que  $[qA]$  é o diâmetro de  $D$  que passa por  $q$ .

*Demonstração.* Decorre imediatamente da Proposição 15, pois a inversão geométrica é uma transformação involutiva.  $\square$

O próximo resultado diz respeito a inversão de uma circunferência que não passa pelo centro de inversão.

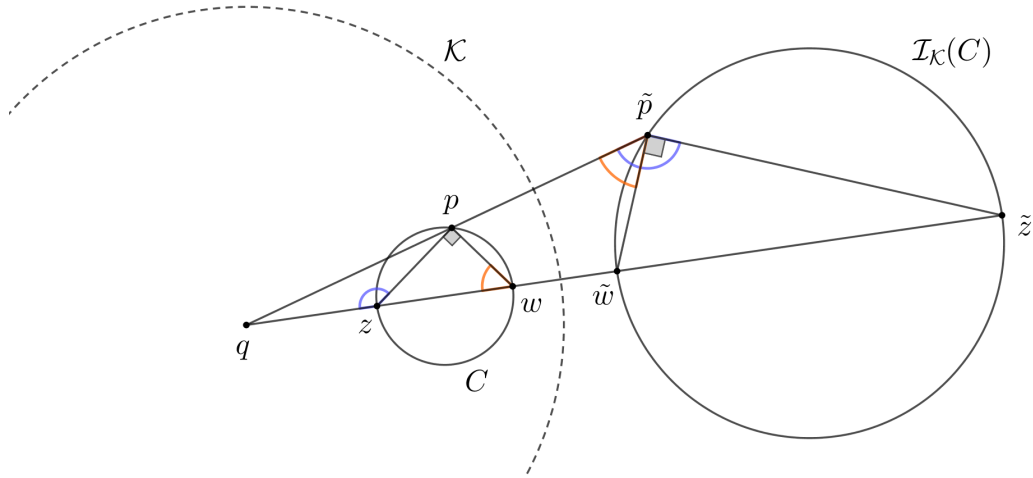


Fig. 4.9: A inversão na circunferência  $\mathcal{K}$  de uma circunferência que não passa pelo centro  $q$  de  $\mathcal{K}$ .

**Proposição 16.** *A inversa de uma circunferência  $C$  que não passa por  $q$  numa circunferência  $\mathcal{K}$  de centro  $q$  e raio  $R$  é outra circunferência que também não passa por  $q$ .*

*Demonstração.* Sejam  $r$ , a recta que contém os pontos  $q$  e o centro de  $C$ , e  $z, w \in r \cap C$ . Assim, o triângulo  $zwp$  é rectângulo em  $p$ , onde  $p$  é um ponto arbitrário de  $C$  distinto de  $z$  e  $w$ . Sejam  $\tilde{z}$ ,  $\tilde{w}$  e  $\tilde{p}$  as imagens pela  $\mathcal{I}_{\mathcal{K}}$  de  $z$ ,  $w$  e  $p$ , respectivamente. Da Proposição 14 temos que os ângulos  $\angle(qzp)$  e  $\angle(q\tilde{p}\tilde{z})$  são congruentes, bem como os ângulos  $\angle(qwp)$  e  $\angle(q\tilde{p}\tilde{w})$ . Considerando o triângulo rectângulo  $zwp$ , observamos que  $\angle(qzp) = \angle(zpw) + \angle(zwp)$ . Segue-se que  $\angle(\tilde{w}\tilde{p}\tilde{z}) = \pi/2$  (veja-se a Fig. 4.9) e, portanto,  $\tilde{z}$  e  $\tilde{w}$  são as extremidades de um diâmetro duma circunferência que passa por  $\tilde{p}$ .  $\square$

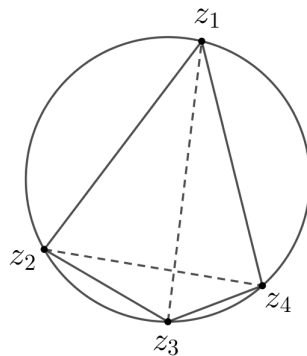


Fig. 4.10: Quadrilátero de vértices  $z_1, z_2, z_3, z_4$  inscrito numa circunferência.

Demonstraremos, de seguida, o Teorema de Ptolemeu, usando simplesmente a geometria das inversões.

Considere o quadrilátero  $(z_1z_2z_3z_4)$  cujos vértices são  $z_1, z_2, z_3$  e  $z_4$  inscrito numa circunferência (veja-se a Fig. 4.10). Ptolemeu, cerca de 150 d. C. provou o teorema que se segue:

**Teorema 18** (Teorema de Ptolemeu). *A soma dos produtos dos comprimentos dos lados opostos do quadrilátero  $(z_1z_2z_3z_4)$  é igual ao produto dos comprimentos das diagonais. Simbolicamente,*

$$|z_1 - z_4||z_2 - z_3| + |z_1 - z_2||z_3 - z_4| = |z_1 - z_3||z_2 - z_4|.$$

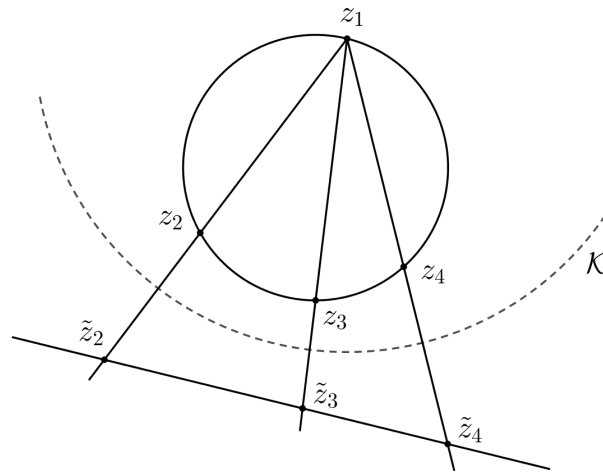


Fig. 4.11: Inversão dos vértices  $z_2, z_3, z_4$  do quadrilátero  $(z_1z_2z_3z_4)$  numa circunferência  $\mathcal{K}$  centrada em  $z_1$ .

*Demonstração.* Invertendo a figura numa circunferência  $\mathcal{K}$  centrada num dos vértices do quadrilátero (veja-se a Fig. 4.11), obtém-se

$$|\tilde{z}_2 - \tilde{z}_3| + |\tilde{z}_3 - \tilde{z}_4| = |\tilde{z}_2 - \tilde{z}_4|.$$

Tendo em conta (4.9), deduzimos que

$$\frac{|z_2 - z_3|}{|z_1 - z_2||z_1 - z_3|} + \frac{|z_3 - z_4|}{|z_1 - z_3||z_1 - z_4|} = \frac{|z_2 - z_4|}{|z_1 - z_2||z_1 - z_4|},$$

conforme pretendido. □

**Proposição 17.** *Toda transformação de Möbius nuclear (translação, rotação, homotetia, inversão complexa) é o produto (ou seja, é o resultado da composição) de duas inversões geométricas.*

*Demonstração.* A demonstração dessa proposição pode ser encontrada em [17]. □

**Corolário 7.** *Toda transformação de Möbius é o produto de não mais do que sete transformações nucleares, consequentemente é o produto de um número par ( $\leq 14$ ) de inversões.*

**Proposição 18** (Razão cruzada vs simetria). *Seja  $C$  uma circunferência que passa pelos pontos  $z_1, z_2, z_3$ . Os pontos  $\tilde{z}$  e  $z$  são simétricos em relação a  $C$  se, e somente se,*

$$(\tilde{z}, z_1; z_2, z_3) = \overline{(z, z_1; z_2, z_3)}.$$

*Demonstração.* Seja  $C = \{z : |z - z_0| = R\}$ , (circunferência de centro  $z_0$  e raio  $R$ ), e sejam  $z_1, z_2, z_3 \in C$ . Nas condições da proposição e tendo em conta que a razão cruzada é invariante para transformações de Möbius, vem

$$\begin{aligned} (\tilde{z}, z_1; z_2, z_3) &= \overline{(z, z_1; z_2, z_3)} \\ &= \overline{(z - z_0, z_1 - z_0; z_2 - z_0, z_3 - z_0)} \\ &= \overline{\left(\bar{z} - \bar{z}_0, \frac{R^2}{z_1 - z_0}; \frac{R^2}{z_2 - z_0}, \frac{R^2}{z_3 - z_0}\right)} \\ &= \left(\frac{R^2}{\bar{z} - \bar{z}_0}, z_1 - z_0; z_2 - z_0, z_3 - z_0\right) \\ &= \left(z_0 + \frac{R^2}{\bar{z} - \bar{z}_0}, z_1; z_2, z_3\right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\tilde{z} = z_0 + \frac{R^2}{\bar{z} - \bar{z}_0},$$

o que prova o pretendido.  $\square$

Para terminar esta secção, provemos que as transformações de Möbius preservam a simetria.

**Teorema 19** (Princípio da Simetria). *Se uma transformação de Möbius transforma uma circunferência  $C_1$  numa circunferência  $C_2$ , então transforma qualquer par de pontos simétricos em relação a  $C_1$  num par de pontos simétricos em relação a  $C_2$ .*

*Demonstração.* Sejam  $z_1, z_2, z_3 \in C_1$  e  $T$  a transformação de Möbius que leva  $C_1$  em  $C_2$ . Como a razão cruzada é invariante para  $T$ , segue-se da Proposição 18, que se  $z$  e  $\tilde{z}$  são simétricos em relação a  $C_1$ ,  $\tilde{z} = I_{C_1}(z)$ , então

$$\begin{aligned} (T(\tilde{z}), T(z_1); T(z_2), T(z_3)) &= \overline{(z, z_1; z_2, z_3)} \\ &= \overline{(z, \tilde{z}; z_2, z_3)} \\ &= \overline{(T(z), T(z_1); T(z_2), T(z_3))}. \end{aligned}$$

Como  $T(z_1), T(z_2), T(z_3) \in C_2$ , conclui-se que  $T(\tilde{z})$  e  $T(z)$  são simétricos em relação a  $C_2$ , isto é,  $T(\tilde{z}) = I_{C_2=T(C_1)}T(z)$ , o que prova o pretendido.  $\square$

## 4.5 Conformidade e princípio da orientação

Nesta secção mostraremos que as transformações de Möbius são transformações conformes e, também, reflectiremos sobre o princípio da orientação. Os conceitos aqui apresentados, têm [3] e [13] como suporte bibliográfico.

**Teorema 20.** *As transformações de Möbius são transformações conformes.*

*Demonstração.* Seja  $T$  uma transformação de Möbius,

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

com  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  e  $ad - bc \neq 0$ . Se  $c = 0$ , então  $a \neq 0$  e  $d \neq 0$ , uma vez que  $ad - bc \neq 0$ . Nestas condições,

$$T'(z) = \frac{a}{d} \neq 0.$$

Por seu lado, se  $c \neq 0$ , vem

$$T'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} \neq 0.$$

Sendo assim, uma transformação de Möbius  $T$  não tem pontos críticos, pelo que é conforme no seu domínio de analiticidade, ou seja, é conforme para  $z \neq -d/c$  e  $z \neq \infty$ .  $\square$

**Exemplo 6.** *Como vimos, a inversão geométrica  $\mathcal{I}_C(z) = 1/\bar{z}$  resulta da composição da função conjugação com uma transformação de Möbius (a inversão complexa). No caso geral, uma inversão geométrica em relação a uma circunferência arbitrária obtém-se como composição da função conjugação com uma determinada transformação de Möbius. Desta forma, a inversão geométrica não é conforme, uma vez que preserva a medida de amplitude dos ângulos, mas não a sua orientação.*

**Proposição 19.** *Uma transformação de Möbius (4.1) fixa o eixo real se, e somente se, os coeficientes  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ .*

*Demonstração.* A demonstração dessa proposição pode ser encontrada em [13].  $\square$

Reflectiremos, agora, sobre o *princípio da orientação*. As transformações de Möbius, sendo conformes, preservam a medida dos ângulos e a sua orientação. Intuitivamente, podemos dizer que a direita e esquerda são preservadas.

**Observação 11.** *A orientação de uma circunferência  $C$  fica inteiramente determinada por um terno ordenado de pontos  $z_1, z_2, z_3 \in C$ .*

**Definição 29.** *Diz-se que o ponto  $z$  não pertencente a circunferência  $C$  está à direita de  $C$  se*

$$\text{Im}(z, z_1; z_2, z_3) < 0$$

*e está à esquerda de  $C$  se*

$$\text{Im}(z, z_1; z_2, z_3) > 0.$$

Há que mostrar que só existem duas orientações possíveis, mais concretamente, verifiquemos que a distinção entre esquerda e direita é análoga à distinção entre o semi-plano superior e inferior. Como a razão cruzada é invariante, e como as transformações de Möbius levam “circunferências” em “circunferências”, basta considerar o caso de  $C$  ser o eixo real. Então de acordo com (4.6)

$$(z, z_1; z_2, z_3) = \frac{az + b}{cz + d}$$

pode ser escrita com coeficientes reais, tendo-se

$$\operatorname{Im}(z, z_1; z_2, z_3) = \frac{ad - bc}{|cz + d|^2} \operatorname{Im} z,$$

cujo sinal só depende de  $ad - bc \neq 0$ , mostrando-se assim o pretendido.

Note-se que

$$\operatorname{Im}(z, z_1; z_2, z_3) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{C}.$$

O teorema que se segue decorre, imediatamente, do facto da razão cruzada ser invariante para transformações de Möbius.

**Teorema 21** (Princípio da Orientação). *Uma transformação de Möbius  $T$  transforma uma circunferência  $C_1$ , orientada pelo terno  $z_1, z_2, z_3$ , numa circunferência  $C_2$  que orientamos pelo terno  $T(z_1), T(z_2), T(z_3)$ , de tal forma que a esquerda e direita de  $C_1$  é transformada na esquerda e direita de  $C_2$ , respectivamente.*

**Exemplo 7.** *Consideremos a circunferência unitária  $C$ , orientada no sentido anti-horário. Assim, a orientação de  $C$  pode ser caracterizada, por exemplo, pelo terno  $1, i, -1$ . De acordo com (4.6), tem-se*

$$T(z) = (z, 1, i, -1) = \frac{z - 1}{z + 1} \frac{i + 1}{i - 1} = -i \frac{z - 1}{z + 1}.$$

Em particular,

$$T(0) = i \quad e \quad T(2) = -\frac{1}{3}i, \tag{4.10}$$

pelo que  $\operatorname{Im}(0, 1, i, -1) > 0$  e  $\operatorname{Im}(2, 1, i, -1) < 0$ . Concluimos, como seria de esperar, que 0 está à esquerda e 2 está à direita de  $C$ . Pensemos, numa partícula a percorrer a circunferência  $C$  no sentido anti-horário. No seu movimento, esta partícula depara com o ponto 0 à sua esquerda e com o ponto 2 à sua direita. Em relação a infinito, a partícula deverá observá-lo à sua direita. De facto, tem-se

$$T(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} T(z) = -i,$$

donde  $\operatorname{Im} T(\infty) < 0$ . Caso a partícula percorra a circunferência  $C$  no sentido horário, então encontrará à sua esquerda os pontos que anteriormente encontrara à sua direita e vice-versa. Para termos uma confirmação algébrica, basta refazermos os cálculos, invertendo o sentido da circunferência, para, por exemplo,  $S(z) = (z, 1; -1, i)$ . Ter-se-á obrigatoriamente  $\operatorname{Im} S(0) < 0$  e  $\operatorname{Im} S(2) > 0$ .

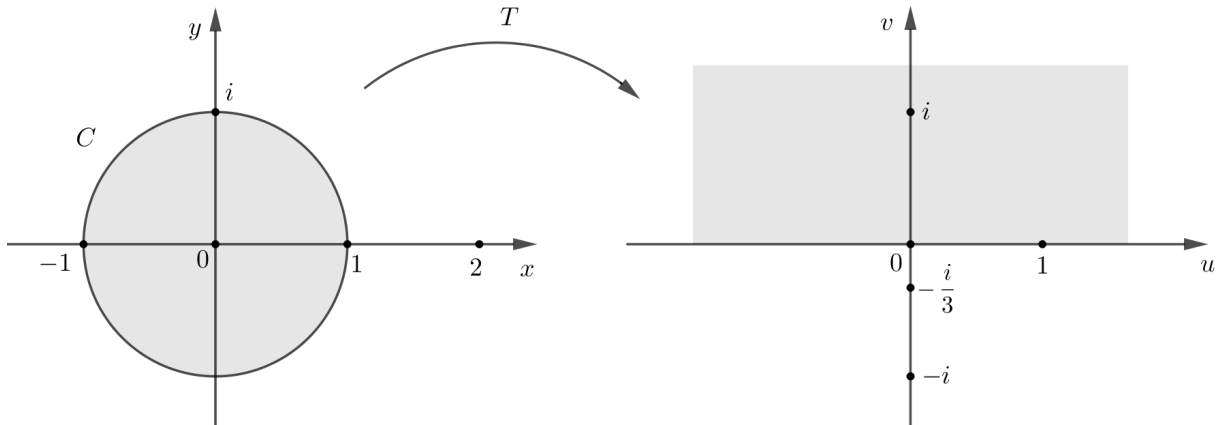


Fig. 4.12: Comportamento da transformação de Möbius  $T$ .

Toda transformação de Möbius transforma “circunferências” em “circunferências”. Além disso,  $T$  transforma os pontos  $1, i, -1$  da circunferência  $C$ , respectivamente, nos pontos  $0, 1, \infty$ . Desta forma,  $T$  terá que transformar  $C$  no eixo real (orientado no sentido usual).

Além disso, a esquerda e direita de  $C$  também são preservadas. De facto, de (4.10) segue-se que o disco unitário aberto de centro  $0$  e raio  $1$ ,  $D(0, 1)$ , é transformado no semi-plano superior aberto, enquanto que o complementar do disco unitário fechado  $\mathbb{C} - \overline{D}(0, 1)$  é transformado no semi-plano inferior aberto (veja-se a Fig. 4.12).

# Capítulo 5

## O Grupo de Lorentz

Neste capítulo estudaremos o espaço vectorial de Minkowski e o grupo de Lorentz, cujos elementos são chamados de transformações de Lorentz, dentro do contexto da teoria da relatividade restrita. Não é o nosso objectivo, aqui, introduzir a teoria da relatividade restrita mas sim, apresentar um conjunto de conceitos fundamentais para o capítulo seguinte, onde estabeleceremos uma relação existente entre as transformações de Möbius e as transformações de Lorentz.

### 5.1 Preliminares

Um espaço vectorial  $\mathcal{V}$ , sobre o corpo dos números reais  $\mathbb{R}$  é um conjunto, cujos elementos são chamados vectores, no qual estão definidas duas operações: a adição, que a cada par de vectores  $u, v \in \mathcal{V}$  faz corresponder um novo vector  $u + v \in \mathcal{V}$ , chamado a soma de  $u$  e  $v$ , e a multiplicação por um número real, que a cada número  $\alpha \in \mathbb{R}$  e a cada vector  $v \in \mathcal{V}$  faz corresponder um vector  $\alpha \cdot v$ , ou  $\alpha v$ , chamado o produto de  $\alpha$  por  $v$ . Essas operações devem satisfazer, para quaisquer  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  e  $u, v, w \in \mathcal{V}$ , as condições abaixo, chamadas os axiomas de espaço vectorial:

**comutatividade:**  $u + v = v + u$ ;

**associatividade:**  $(u + v) + w = u + (v + w)$ ;

**vector nulo:** existe um vector  $0 \in \mathcal{V}$ , chamado *vector nulo*, ou *vector zero*, tal que  $0 + v = v + 0 = v$ , para todo  $v \in \mathcal{V}$ ;

**inverso aditivo:** para cada vector  $v \in \mathcal{V}$  existe um vector  $-v \in \mathcal{V}$ , chamado o *inverso aditivo*, ou *simétrico* de  $v$ , tal que  $v + (-v) = -v + v = 0$ ;

**distributividade:**  $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$  e  $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$ ;

**multiplicação por 1:**  $1 \cdot v = v$ .

Seja  $\mathcal{V}$  um espaço vectorial arbitrário de dimensão  $n \geq 1$  sobre o corpo dos números reais. Uma *forma bilinear* em  $\mathcal{V}$  é uma função  $g : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  que é linear em cada uma das variáveis, isto é,

$$\begin{aligned} g(a_1v_1 + a_2v_2, w) &= a_1g(v_1, w) + a_2g(v_2, w) \\ g(v, a_1w_1 + a_2w_2) &= a_1g(v, w_1) + a_2g(v, w_2), \end{aligned}$$

onde os  $a_i$  são números reais e os  $v_i, w_i \in \mathcal{V}$ . A forma bilinear  $g$  diz-se *simétrica* quando  $g(w, v) = g(v, w)$  para todo  $v, w \in \mathcal{V}$  e *não-degenerada* quando  $g(v, w) = 0$ , para todo  $w \in \mathcal{V}$  implicar  $v = 0$ .

Uma forma bilinear  $g$ , simétrica e não-degenerada é geralmente chamada de *produto interno* e a imagem de  $(v, w)$  pela  $g$  é frequentemente escrita  $v \cdot w$  em vez de  $g(v, w)$ . O exemplo standard é o produto interno usual em  $\mathbb{R}^n$ : se  $v = (v^1, \dots, v^n)$  e  $w = (w^1, \dots, w^n)$ , então  $g(v, w) = v \cdot w = v^1w^1 + \dots + v^nw^n$ . Este produto interno, particular, é *positivo definido*, isto é, goza da seguinte propriedade: se  $v \neq 0$ , então  $g(v, v) > 0$ . Nem todos os produtos internos compartilham esta propriedade.

**Exemplo 8.** O produto interno  $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $g(v, w) = v^1w^1 + v^2w^2 + \dots + v^{n-1}w^{n-1} - v^nw^n$ , não é positivo definido. Com efeito, dados  $v = (v^1, v^2, \dots, v^n)$  com  $(v^n)^2 = (v^1)^2 + \dots + (v^{n-1})^2$  e  $w = (w^1, w^2, \dots, w^n)$  com  $(w^n)^2 > (w^1)^2 + \dots + (w^{n-1})^2$  obtemos, respectivamente,  $g(v, v) = 0$  e  $g(w, w) < 0$ .

Se  $g$  é um produto interno em  $\mathcal{V}$ , então dois vectores  $v$  e  $w$  para os quais  $g(v, w) = 0$  são chamados  *$g$ -ortogonais*, ou simplesmente *ortogonais* se não houver ambiguidade quanto ao produto interno pretendido. A *forma quadrática* associada ao produto interno  $g$  em  $\mathcal{V}$  é a função  $\mathfrak{Q} : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $\mathfrak{Q}(v) = g(v, v)$ . Um vector  $v \in \mathcal{V}$  para o qual  $\mathfrak{Q}(v)$  é 1 ou  $-1$  é chamado de *vector unitário*. Uma base  $\{e_1, \dots, e_n\}$  de  $\mathcal{V}$ , que consiste de vectores unitários mutuamente ortogonais, é chamado de *base ortonormal* de  $\mathcal{V}$ .

**Teorema 22.** Se  $\mathcal{V}$  é um espaço vectorial real  $n$ -dimensional no qual é definida uma forma bilinear  $g : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ , não-degenerada e simétrica, então existe uma base  $\{e_1, \dots, e_n\}$  de  $\mathcal{V}$  tal que  $g(e_i, e_j) = 0$  se  $i \neq j$  e  $\mathfrak{Q}(e_i) = \pm 1$  para cada  $i = 1, \dots, n$ . Além disso, o número de vectores base  $e_i$  para o qual  $\mathfrak{Q}(e_i) = -1$  é o mesmo para qualquer uma dessas bases.

*Demonstração.* A demonstração desse teorema pode ser encontrada em [11]. □

O número  $r$  dos  $e_i$  em qualquer base ortonormal de  $g$  com  $\mathfrak{Q}(e_i) = -1$  é chamado *índice* de  $g$ . Doravante, assumiremos que todas as bases ortonormais são indexadas de forma que estes  $e_i$  apareçam no final da lista e são numeradas da seguinte forma:

$$\{e_1, e_2, \dots, e_{n-r}, e_{n-r+1}, \dots, e_n\}$$

onde  $\mathfrak{Q}(e_i) = 1$  para  $i = 1, 2, \dots, n - r$  e  $\mathfrak{Q}(e_i) = -1$  para  $i = n - r + 1, \dots, n$ . Em relação a tais bases se  $v = v^i e_i$  e  $w = w^i e_i$ , então temos

$$g(v, w) = v^1w^1 + v^2w^2 + \dots + v^{n-r}w^{n-r} - v^{n-r+1}w^{n-r+1} - \dots - v^nw^n.$$

## 5.2 Espaço-tempo de Minkowski

Com base nos trabalhos de Lorentz, Poincaré e Einstein, em 1907 o matemático alemão Hermann Minkowski (1864 - 1909) mostrou que a teoria da relatividade restrita poderia ser melhor formalizada assumindo-se que os fenômenos físicos ocorrem não num espaço tridimensional, mas sim num espaço quadridimensional, denominado o espaço-tempo de Minkowski, aqui representado por  $\mathcal{M}$ .

**Definição 30.** *O espaço-tempo de Minkowski  $\mathcal{M}$  é um espaço vectorial real quadridimensional no qual é definida uma forma bilinear  $g$ , não-degenerada, simétrica e de índice 1. Os elementos de  $\mathcal{M}$  são chamados eventos e  $g$  é designado de produto interno de Lorentz.*

A quadridimensionalidade de  $\mathcal{M}$  é equivalente a existência de uma base  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  com a seguinte propriedade: se  $v = v^a e_a$  e  $w = w^a e_a$ , então

$$g(v, w) = v^1 w^1 + v^2 w^2 + v^3 w^3 - v^4 w^4.$$

Uma base ortonormal  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  de  $\mathcal{M}$  fornece as coordenadas deste mundo de eventos e deve ser identificado com um “sistema de referência”. Assim, se  $x = x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3 + x^4 e_4$ , consideramos  $(x^1, x^2, x^3, x^4)$  como sendo as coordenadas de  $x$  em relação à base  $\{e_a\}$ , onde  $(x^1, x^2, x^3)$  e  $(x^4)$  são as coordenadas espaciais e temporal, respectivamente, fornecidas ao evento  $x$  por um observador que se encontra neste sistema de referência.

**Nota 12.** *Para simplificação da escrita, introduzimos a matriz  $\eta$ ,  $4 \times 4$  definida por*

$$\eta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

*cujas entradas são denotadas por  $\eta_{ab}$  ou  $\eta^{ab}$ , onde a escolha em qualquer situação específica é ditada pelos requisitos da convenção de somatório. Assim  $\eta_{ab} = \eta^{ab} = 1$  se  $a = b = 1, 2, 3$ ,  $-1$  se  $a = b = 4$  e 0 caso contrário. Como resultado, podemos escrever  $g(e_a, e_b) = \eta_{ab} = \eta^{ab}$  e, com a convenção de soma,  $g(v, w) = \eta_{ab} v^a w^b$ .*

Uma vez que o produto interno de Lorentz  $g$  em  $\mathcal{M}$  não é positivo definido, existem vectores  $v$  diferentes de zero em  $\mathcal{M}$  para os quais  $g(v, v) = 0$ , por exemplo,  $v = e_1 + e_4$  é um destes, com efeito  $g(v, v) = \mathfrak{Q}(e_1) + 2g(e_1, e_4) + \mathfrak{Q}(e_4) = 1 + 0 - 1 = 0$ .

**Definição 31.** *Um vector  $v \in \mathcal{M}$  diz-se nulo, ou do tipo-luz, quando  $\mathfrak{Q}(v) = g(v, v) = 0$ .*

O espaço vectorial  $\mathcal{M}$ , na realidade, possui bases que consistem exclusivamente de vectores nulos, como mostra o exemplo a seguir:

**Exemplo 9.** *O conjunto  $\mathfrak{B} = \{e_1 + e_4, e_2 + e_4, e_3 + e_4, -e_1 + e_4\}$  constitui uma base nula de  $\mathcal{M}$ , isto é,  $\mathfrak{B}$  é um conjunto de quatro vectores nulos, linearmente independentes e que geram  $\mathcal{M}$ , como facilmente se verifica.*

Uma base formada por vectores nulos pode não consistir de vectores mutuamente ortogonais. No entanto, utilizando a desigualdade de Schwartz em  $\mathbb{R}^3$ , prova-se facilmente o seguinte:

**Teorema 23.** *Dois vectores nulos  $v$  e  $w$  diferentes de zero em  $\mathcal{M}$ , são ortogonais se, e somente se, são paralelos, isto é, existe  $t \in \mathbb{R}$  tal que  $v = tw$ .*

Considere dois eventos distintos  $x_0$  e  $x$  para os quais o *vector deslocamento*  $u = x - x_0$  de  $x_0$  para  $x$  é nulo, isto é,  $\mathfrak{Q}(u) = \mathfrak{Q}(x - x_0) = 0$ . Em relação a qualquer base ortonormal  $\{e_a\}$ , se  $x = x^a e_a$  e  $x_0 = x_0^a e_a$ , então

$$(x^1 - x_0^1)^2 + (x^2 - x_0^2)^2 + (x^3 - x_0^3)^2 - (x^4 - x_0^4)^2 = 0. \quad (5.1)$$

A condição acima descreve a relação existente entre dois eventos que se encontram na linha de mundo (sequência contínua de eventos) de algum fotão. Por esta razão, e devido à semelhança formal entre (5.1) e a equação de um cone circular em  $\mathbb{R}^3$ , definimos o *cone nulo* (ou *cone de luz*)  $\mathcal{C}_N(x_0)$  no ponto  $x_0 \in \mathcal{M}$  por

$$\mathcal{C}_N(x_0) = \{x \in \mathcal{M} : \mathfrak{Q}(x - x_0) = 0\}$$

e imaginámos-no-lo suprimido a terceira dimensão espacial  $x^3$  (veja-se a Fig. 5.1).

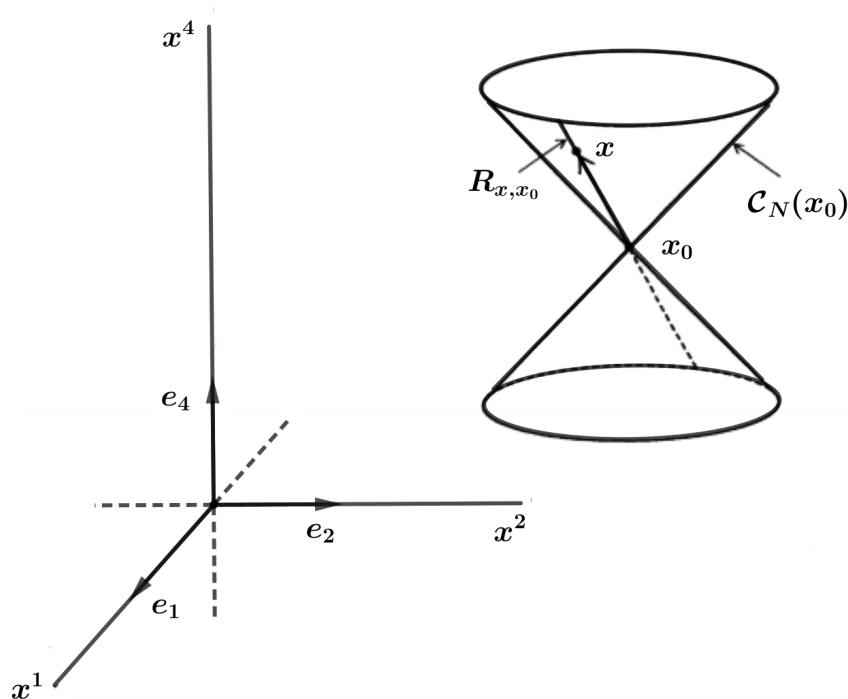


Fig. 5.1: Cone nulo ou cone de luz.

Assim,  $C_N(x_0)$  consiste de todos os eventos em  $\mathcal{M}$  que estão “conectados com  $x_0$  por um raio de luz”. Para qualquer evento  $x$  (diferente de  $x_0$ ), definimos a *linha de mundo nulo* (ou *raio de luz*)  $R_{x_0,x}$ , contendo  $x_0$  e  $x$  por

$$R_{x_0,x} = \{x_0 + t(x - x_0) : t \in \mathbb{R}\}$$

e pensemos nela como a linha do mundo do fóton que passa por  $x_0$  e  $x$ .

**Lema 4.** *Se  $x, x_0 \in \mathcal{M}$  com  $x \neq x_0$  e  $\mathfrak{Q}(x - x_0) = 0$ , então  $R_{x_0,x} = R_{x,x_0}$ .*

$C_N(x_0)$  é apenas a união de todos os raios de luz que passam por  $x_0$ . De facto,

**Teorema 24.** *Se  $x_0$  e  $x$  são dois eventos distintos em  $\mathcal{M}$  com  $\mathfrak{Q}(x - x_0) = 0$ , então*

$$R_{x_0,x} = C_N(x_0) \cap C_N(x). \quad (5.2)$$

*Demonstração.* Seja  $z = x_0 + t(x - x_0)$  um elemento de  $R_{x_0,x}$ . Então  $z - x_0 = t(x - x_0)$ , portanto,  $\mathfrak{Q}(z - x_0) = t^2 \mathfrak{Q}(x - x_0) = 0$ , logo  $z \in C_N(x_0)$ . Do Lema 4 segue que,  $z \in C_N(x)$  e assim  $R_{x_0,x} \subset C_N(x_0) \cap C_N(x)$ . Para provar a inclusão oposta, assumimos que  $z \in C_N(x_0) \cap C_N(x)$ . Então cada um dos vectores  $z - x$ ,  $z - x_0$  e  $x_0 - x$  é nulo. Mas  $z - x_0 = (z - x) - (x_0 - x)$ , portanto  $0 = \mathfrak{Q}(z - x_0) = \mathfrak{Q}(z - x) - 2g(z - x, x_0 - x) + \mathfrak{Q}(x_0 - x) = 2g(z - x, x_0 - x)$ . Assim,  $g(z - x, x_0 - x) = 0$ . Se  $z = x$  não há mais o que provar. Se  $z \neq x$  e como  $x \neq x_0$ , então aplicando o Teorema 23 aos vectores nulos ortogonais  $z - x$  e  $x_0 - x$  obtemos  $t \in \mathbb{R}$  tal que  $z - x = t(x_0 - x)$  e segue-se que  $z \in R_{x_0,x}$ .  $\square$

**Definição 32.** *Dizemos que um vector  $v \in \mathcal{M}$  é do tipo-tempo quando  $\mathfrak{Q}(v) < 0$  e do tipo-espaço quando  $\mathfrak{Q}(v) > 0$ .*

**Exemplo 10.** *Seja  $\mathfrak{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  uma base ortonormal de  $\mathcal{M}$ . Os vectores  $v = e_1 + 2e_4$  e  $w = e_1 - 2e_3$  são, respectivamente, do tipo-tempo e do tipo-espaço. Com efeito,*

$$\begin{aligned} \mathfrak{Q}(v) &= g(e_1, e_1) + 4g(e_1, e_4) + 4g(e_4, e_4) = 1 - 4 = -3 < 0 \\ \mathfrak{Q}(w) &= g(e_1, e_1) - 4g(e_1, e_3) + 4g(e_3, e_3) = 1 + 4 = 5 > 0. \end{aligned}$$

**Observação 12.** *Sejam  $x$  e  $x_0$  dois eventos em  $\mathcal{M}$ . Se o vector deslocamento  $x - x_0$  é do tipo-tempo, isto é,  $\mathfrak{Q}(x - x_0) < 0$ , então em relação a qualquer base ortonormal de  $\mathcal{M}$ ,  $(\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2 < (\Delta x^4)^2$  ( $x - x_0$  se encontra no interior de  $C_N(x_0)$ ). Se  $x - x_0$  é do tipo-espaço, então a desigualdade é invertida e imaginamos  $x - x_0$  no exterior de  $C_N(x_0)$ .*

**Nota 13.** *Se  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  e  $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3, \hat{e}_4\}$  são duas bases ortonormais de  $\mathcal{M}$ , então existe uma única transformação linear  $L : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  tal que  $L(e_a) = \hat{e}_a$  para cada  $a = 1, 2, 3, 4$ .*

**Definição 33.** *Uma transformação linear  $L : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  diz-se uma transformação ortogonal de  $\mathcal{M}$  quando  $g(Lx, Ly) = g(x, y)$ ,  $\forall x, y \in \mathcal{M}$ .*

**Lema 5.** *Seja  $L : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  uma transformação linear. São equivalentes as seguintes afirmações:*

- (a)  $L$  é uma transformação ortogonal;  
 (b)  $L$  preserva a forma quadrática de  $\mathcal{M}$ , isto é,  $\mathfrak{Q}(Lx) = \mathfrak{Q}(x)$ ,  $\forall x \in \mathcal{M}$ ;  
 (c)  $L$  leva bases ortonormais em bases ortonormais.

*Demonstração.* (a)  $\Rightarrow$  (b): Se  $x \in \mathcal{M}$ , então  $\mathfrak{Q}(Lx) = g(Lx, Lx) = g(x, x) = \mathfrak{Q}(x)$ . (b)  $\Rightarrow$  (a), Dados  $x, y \in \mathcal{M}$ , olhemos para a quantidade  $g(L(x+y), L(x+y)) - g(L(x-y), L(x-y))$  de duas formas diferentes. Por um lado  $g(L(x+y), L(x+y)) - g(L(x-y), L(x-y)) = 4g(Lx, Ly)$ . Por outro lado, usando a hipótese,  $g(L(x+y), L(x+y)) - g(L(x-y), L(x-y)) = 4g(x, y)$ . Portanto,  $g(Lx, Ly) = g(x, y)$ . (b)  $\Rightarrow$  (c): Sejam  $\mathfrak{B} = \{u_1, u_2, u_3, u_4\} \subset \mathcal{M}$  uma base ortonormal e  $L : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  uma transformação linear, onde  $Lu_1 = v_1$ ,  $Lu_2 = v_2$ ,  $Lu_3 = v_3$  e  $Lu_4 = v_4$ . É suficiente mostrar que  $\mathfrak{B}^* = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  é uma base ortonormal de  $\mathcal{M}$ , isto é,  $\mathfrak{Q}(v_i) = \pm 1$  e  $g(v_i, v_j) = 0$  para  $i \neq j$ . Com efeito,  $\mathfrak{Q}(v_i) = \mathfrak{Q}(Lu_i) = \mathfrak{Q}(u_i) = \pm 1$ . Por outro lado,  $g(v_i, v_j) = g(Lu_i, Lu_j) = g(u_i, u_j) = 0$ , para todo  $i \neq j$ . (c)  $\Rightarrow$  (a): Sejam  $\{e_a\}$  e  $\{Le_a\}$  bases ortonormais de  $\mathcal{M}$ . Escrevendo,  $x = x^a e_a$  e  $y = y^b e_b$  tem-se que  $g(x, y) = x^a y^b g(e_a, e_b) = \eta_{ab} x^a y^b$ . Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} g(Lx, Ly) &= x^a y^b g(Le_a, Le_b) \\ &= x^a y^b g(e_a, e_b) \\ &= \eta_{ab} x^a y^b \\ &= g(x, y), \end{aligned}$$

concluindo assim o pretendido. □

Sejam  $L : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  uma transformação ortogonal e  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  uma base ortonormal de  $\mathcal{M}$ . Pelo Lema 5,  $\hat{e}_1 = Le_1$ ,  $\hat{e}_2 = Le_2$ ,  $\hat{e}_3 = Le_3$  e  $\hat{e}_4 = Le_4$  também formam uma base ortonormal de  $\mathcal{M}$ . Em particular, cada  $e_u$ ,  $u = 1, 2, 3, 4$ , pode ser expresso como uma combinação linear dos  $\hat{e}_a$ :

$$e_u = \Lambda^1_u \hat{e}_1 + \Lambda^2_u \hat{e}_2 + \Lambda^3_u \hat{e}_3 + \Lambda^4_u \hat{e}_4 = \Lambda^a_u \hat{e}_a, \quad u = 1, 2, 3, 4, \quad (5.3)$$

onde  $\Lambda^a_u$  são constantes. Assim, as condições de ortogonalidade  $g(e_c, e_d) = \eta_{cd}$ , onde  $c, d = 1, 2, 3, 4$ , podem ser escritas

$$\Lambda^1_c \Lambda^1_d + \Lambda^2_c \Lambda^2_d + \Lambda^3_c \Lambda^3_d - \Lambda^4_c \Lambda^4_d = \eta_{cd} \quad (5.4)$$

ou, segundo a convenção da soma,

$$\Lambda^a_c \Lambda^b_d \eta_{ab} = \eta_{cd}, \quad c, d = 1, 2, 3, 4, \quad (5.5)$$

ou equivalentemente como

$$\Lambda^a_c \Lambda^b_d \eta^{cd} = \eta^{ab}, \quad a, b = 1, 2, 3, 4, \quad (5.6)$$

**Definição 34.** A matriz  $\Lambda = [\Lambda^a_b]_{a,b=1,2,3,4}$  associada à transformação ortogonal  $L$  e a base ortonormal  $\{e_a\}$  é definida por

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda^1_1 & \Lambda^1_2 & \Lambda^1_3 & \Lambda^1_4 \\ \Lambda^2_1 & \Lambda^2_2 & \Lambda^2_3 & \Lambda^2_4 \\ \Lambda^3_1 & \Lambda^3_2 & \Lambda^3_3 & \Lambda^3_4 \\ \Lambda^4_1 & \Lambda^4_2 & \Lambda^4_3 & \Lambda^4_4 \end{bmatrix}.$$

**Observação 13.** Consideramos a matriz  $\Lambda$  associada a  $L$  e  $\{e_a\}$ , como uma matriz de transformação de coordenadas. Mais precisamente, se o evento  $x \in \mathcal{M}$  tiver coordenadas  $x = x^1e_1 + x^2e_2 + x^3e_3 + x^4e_4$  em relação à base  $\{e_a\}$ , então as suas coordenadas em relação à base  $\{\hat{e}_a\} = \{Le_a\}$  são  $x = \hat{x}^1\hat{e}_1 + \hat{x}^2\hat{e}_2 + \hat{x}^3\hat{e}_3 + \hat{x}^4\hat{e}_4$ , onde

$$\begin{aligned} \hat{x}^1 &= \Lambda^1_1 x^1 + \Lambda^1_2 x^2 + \Lambda^1_3 x^3 + \Lambda^1_4 x^4 \\ \hat{x}^2 &= \Lambda^2_1 x^1 + \Lambda^2_2 x^2 + \Lambda^2_3 x^3 + \Lambda^2_4 x^4 \\ \hat{x}^3 &= \Lambda^3_1 x^1 + \Lambda^3_2 x^2 + \Lambda^3_3 x^3 + \Lambda^3_4 x^4 \\ \hat{x}^4 &= \Lambda^4_1 x^1 + \Lambda^4_2 x^2 + \Lambda^4_3 x^3 + \Lambda^4_4 x^4 \end{aligned}$$

que geralmente escrevemos de forma mais concisa como

$$\hat{x}^a = \Lambda^a_b x^b, \quad a = 1, 2, 3, 4. \quad (5.7)$$

**Nota 14.** Ao efectuar as multiplicações de matrizes, abaixo, indicadas, mostra-se que a condição (5.5) é equivalente a

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta, \quad (5.8)$$

onde  $T$  significa “transposta”.

A condição (5.8) traduz o facto de que  $\Lambda$  é a matriz de uma transformação linear que preserva a forma quadrática. Em particular, se  $x - x_0$  é o vector deslocamento entre dois eventos para os quais  $\mathfrak{Q}(x - x_0) = 0$ , então  $(\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2 - (\Delta x^4)^2$  e  $(\Delta \hat{x}^1)^2 + (\Delta \hat{x}^2)^2 + (\Delta \hat{x}^3)^2 - (\Delta \hat{x}^4)^2$  são ambos iguais a zero, onde  $\Delta \hat{x}^a = \Lambda^a_b \Delta x^b$ .

**Definição 35.** Toda matriz  $(4 \times 4)$  que satisfaz a condição (5.8) é chamada de transformação geral de Lorentz.

**Observação 14.** Tomando determinantes em ambos os lados de (5.8) obtemos,  $\det \Lambda = \pm 1$ . Portanto, a matriz  $\Lambda$  associada a transformação ortogonal  $L$  é invertível, assim  $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$  implica  $\Lambda^T \eta = \eta \Lambda^{-1}$ , ou seja,  $\Lambda^{-1} = \eta^{-1} \Lambda^T \eta$ , como  $\eta^{-1} = \eta$  vem

$$\Lambda^{-1} = \eta \Lambda^T \eta. \quad (5.9)$$

**Teorema 25.** O conjunto de todas as transformações gerais de Lorentz munido da multiplicação usual de matrizes é um grupo.

*Demonstração.* Como a matriz identidade é o elemento neutro, a multiplicação de matrizes é associativa e, além disso, para cada transformação de Lorentz  $\Lambda$  existe  $\Lambda^{-1}$ , é suficiente provar que esse conjunto é fechado para multiplicações e inversas. Se  $\Lambda$  e  $\Upsilon$  são duas transformações de Lorentz, então  $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$  e  $\Upsilon^T \eta \Upsilon = \eta$ . Mostremos que  $\Lambda \Upsilon$  e  $\Lambda^{-1}$  são também transformações de Lorentz. Com efeito,

$$\begin{aligned} (\Lambda \Upsilon)^T \eta (\Lambda \Upsilon) &= \Upsilon^T \Lambda^T \eta \Lambda \Upsilon \\ &= \Upsilon^T \eta \Upsilon \\ &= \eta. \end{aligned}$$

Por outro lado, tendo em conta (5.9), vem

$$\begin{aligned} (\Lambda^{-1})^T \eta \Lambda^{-1} &= (\eta \Lambda^T \eta)^T \eta (\eta \Lambda^T \eta) \\ &= \eta^T \Lambda \eta^T \eta \eta \Lambda^T \eta \\ &= \eta \Lambda (\eta \Lambda^T \eta) \\ &= \eta \Lambda \Lambda^{-1} \\ &= \eta \end{aligned}$$

o que prova o pretendido.  $\square$

**Definição 36.** O grupo referido no Teorma 25 chama-se grupo geral de Lorentz e denota-se por  $\mathcal{L}_{GH}$ .

**Observação 15.** Denotando as entradas da matriz  $\Lambda^{-1}$  por  $\Lambda_a^b$ , obtemos de (5.9)

$$\begin{bmatrix} \Lambda_1^1 & \Lambda_2^1 & \Lambda_3^1 & \Lambda_4^1 \\ \Lambda_1^2 & \Lambda_2^2 & \Lambda_3^2 & \Lambda_4^2 \\ \Lambda_1^3 & \Lambda_2^3 & \Lambda_3^3 & \Lambda_4^3 \\ \Lambda_1^4 & \Lambda_2^4 & \Lambda_3^4 & \Lambda_4^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda^1_1 & \Lambda^2_1 & \Lambda^3_1 & -\Lambda^4_1 \\ \Lambda^1_2 & \Lambda^2_2 & \Lambda^3_2 & -\Lambda^4_2 \\ \Lambda^1_3 & \Lambda^2_3 & \Lambda^3_3 & -\Lambda^4_3 \\ -\Lambda^1_4 & -\Lambda^2_4 & -\Lambda^3_4 & \Lambda^4_4 \end{bmatrix}. \quad (5.10)$$

Os análogos de (5.3) e (5.7) são, respectivamente

$$\hat{e}_u = \Lambda_u^a e_a, \quad u = 1, 2, 3, 4 \quad (5.11)$$

$$x^b = \Lambda_a^b \hat{x}^a, \quad b = 1, 2, 3, 4. \quad (5.12)$$

### 5.3 Transformações de Lorentz

Observe que, definindo  $c = d = 4$  em (5.5), obtemos  $(\Lambda^4_4)^2 = 1 + (\Lambda^1_4)^2 + (\Lambda^2_4)^2 + (\Lambda^3_4)^2$  de modo que, em particular,  $(\Lambda^4_4)^2 \geq 1$ . Consequentemente,

$$\Lambda^4_4 \geq 1 \quad \text{ou} \quad \Lambda^4_4 \leq -1. \quad (5.13)$$

**Definição 37.** Um elemento  $\Lambda$  de  $\mathcal{L}_{GH}$  diz-se ortocrónica quando  $\Lambda^4_4 \geq 1$  e não ortocrónica quando  $\Lambda^4_4 \leq -1$ .

**Teorema 26.** *Sejam  $v$  um vector do tipo-tempo e  $w$  do tipo-tempo ou nulo, e diferente de zero. Se  $\{e_a\}$  é uma base ortonormal de  $\mathcal{M}$  com  $v = v^a e_a$  e  $w = w^a e_a$ , então ou*

- (i)  $g(v, w) < 0$  se  $v^4 w^4 > 0$ ,
- (ii)  $g(v, w) > 0$  se  $v^4 w^4 < 0$ .

*Demonstração.* Pela hipótese do teorema, temos  $g(v, v) = (v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2 - (v^4)^2 < 0$  e  $(w^1)^2 + (w^2)^2 + (w^3)^2 - (w^4)^2 \leq 0$ , de modo que  $(v^4 w^4)^2 > ((v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2)((w^1)^2 + (w^2)^2 + (w^3)^2) \geq (v^1 w^1 + v^2 w^2 + v^3 w^3)^2$ . A segunda desigualdade acima resulta da desigualdade de Schwartz em  $\mathbb{R}^3$ . Portanto,

$$|v^4 w^4| > |v^1 w^1 + v^2 w^2 + v^3 w^3|,$$

assim, em particular,  $v^4 w^4 \neq 0$  e, além disso,  $g(v, w) \neq 0$ . Suponhamos que  $v^4 w^4 > 0$ . Então  $v^4 w^4 = |v^4 w^4| > |v^1 w^1 + v^2 w^2 + v^3 w^3| \geq v^1 w^1 + v^2 w^2 + v^3 w^3$  e portanto,  $v^1 w^1 + v^2 w^2 + v^3 w^3 - v^4 w^4 < 0$ , isto é,  $g(v, w) < 0$ . Por outro lado, se  $v^4 w^4 < 0$ , então  $g(v, -w) < 0$  e portanto  $g(v, w) > 0$ .  $\square$

**Corolário 8.** *Se um vector diferente de zero em  $\mathcal{M}$  é ortogonal a um vector do tipo-tempo, então ele é do tipo-espaço.*

Denotamos por  $\tau$  o conjunto de todos os vectores do tipo-tempo em  $\mathcal{M}$  e definimos uma relação  $\sim$  em  $\tau$  da seguinte forma: Se  $v, w \in \tau$ , então  $v \sim w$  se, e somente se,  $g(v, w) < 0$  (ou seja,  $v^4$  e  $w^4$  possuem os mesmos sinais em qualquer base ortonormal).

**Proposição 20.** *A relação  $\sim$  é uma relação de equivalência em  $\tau$ , isto é, a relação  $\sim$  é:*

1. Reflexiva ( $v \sim v$  para todo  $v$  em  $\tau$ ),
2. Simétrica ( $v \sim w$  implica  $w \sim v$ ),
3. Transitiva ( $v \sim w$  e  $w \sim x$  implica  $v \sim x$ ).

Além disso,  $\tau$  é a união de duas classes disjuntas,  $\tau^+$  e  $\tau^-$ , com a seguinte propriedade:  $v \sim w$  para todo  $v$  e  $w$  em  $\tau^+$ ,  $v \sim w$  para todo  $v$  e  $w$  em  $\tau^-$  e  $v \not\sim w$  se um dos vectores  $v$  ou  $w$  está em  $\tau^+$  e o outro em  $\tau^-$ .

Pensamos nos elementos de  $\tau^+$  (e  $\tau^-$ ) como tendo a mesma orientação temporal. Mais especificamente, seleccionamos, arbitrariamente,  $\tau^+$  e referimos aos seus elementos como *vectores do tipo-tempo direccionados para o futuro*, enquanto que os vectores em  $\tau^-$  chamamos de *vectores do tipo-tempo direccionados para o passado*.

**Proposição 21.** *Se  $v, w \in \tau^+$  ( $\tau^-$ ) e  $r$  é um número real positivo, então  $rv, v+w \in \tau^+$  ( $\tau^-$ ).*

**Definição 38.** *Para cada  $x_0 \in \mathcal{M}$ , definimos o cone de tempo  $C_T(x_0)$ , o cone de tempo futuro  $C_T^+(x_0)$  e o cone de tempo passado  $C_T^-(x_0)$  em  $x_0$  por*

$$\begin{aligned} C_T(x_0) &= \{x \in \mathcal{M} : \mathfrak{Q}(x - x_0) < 0\}, \\ C_T^+(x_0) &= \{x \in \mathcal{M} : x - x_0 \in \tau^+\} = C_T(x_0) \cap \tau^+, \\ C_T^-(x_0) &= \{x \in \mathcal{M} : x - x_0 \in \tau^-\} = C_T(x_0) \cap \tau^-. \end{aligned}$$

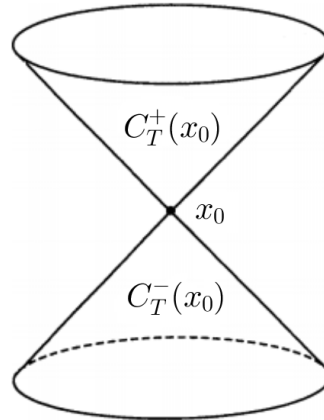


Fig. 5.2: Cone do tempo.

**Observação 16.** Podemos imaginar  $C_T(x_0)$  como o interior do cone nulo  $C_N(x_0)$  e ela é a união disjunta de  $C_T^+(x_0)$  e  $C_T^-(x_0)$ .

Vamos, agora, estender a noção de direcção passado e futuro para vectores nulos diferentes de zero. Começamos por observar que, se  $n$  é um vector nulo diferente de zero, então  $n \cdot v$  tem o mesmo sinal para todo  $v \in \tau^+$ . Com efeito, suponhamos que existem vectores  $v_1, v_2 \in \tau^+$  tais que  $n \cdot v_1 < 0$  e  $n \cdot v_2 > 0$ . Podemos assumir que  $|n \cdot v_1| = n \cdot v_2$ , pois se este não é o caso, podemos substituir  $v_1$  por  $(n \cdot v_2 / |n \cdot v_1|)v_1$ , que também está em  $\tau^+$ , pela Proposição 21, e satisfaz  $g(n, (n \cdot v_2 / |n \cdot v_1|)v_1) = (n \cdot v_2 / |n \cdot v_1|)g(n, v_1) = -n \cdot v_2$ . Assim,  $n \cdot v_1 = -n \cdot v_2$ , ou seja,  $n \cdot (v_1 + v_2) = 0$ . Mas, novamente, pela Proposição 21,  $v_1 + v_2 \in \tau^+$  e portanto, em particular, é um vector do tipo-tempo. Como  $n$  é um vector nulo diferente de zero, isso contradiz o Corolário 8.

**Definição 39.** Um vector nulo  $n$ , diferente de zero, diz-se direccionado para o futuro quando  $n \cdot v < 0$ , para todo  $v \in \tau^+$  e, direccionado para o passado quando  $n \cdot v > 0$ , para todo  $v \in \tau^+$ .

**Proposição 22.** Dois vectores nulos  $n_1$  e  $n_2$ , diferentes de zero possuem a mesma orientação temporal (ambos direccionados para o passado ou para o futuro) se, e somente se,  $n_1^A$  e  $n_2^A$  tiverem o mesmo sinal relativamente a qualquer base ortonormal de  $\mathcal{M}$ .

*Demonstração.* Trata-se de uma consequência imediata do Teorema 26. □

**Definição 40.** Para qualquer  $x_0 \in \mathcal{M}$ , definimos o cone nulo futuro em  $x_0$  e o cone nulo passado em  $x_0$ , respectivamente, por

$$\begin{aligned} C_N^+(x_0) &= \{x \in C_N(x_0) : x - x_0 \text{ é direccionado para o futuro}\}, \\ C_N^-(x_0) &= \{x \in C_N(x_0) : x - x_0 \text{ é direccionado para o passado}\}. \end{aligned}$$

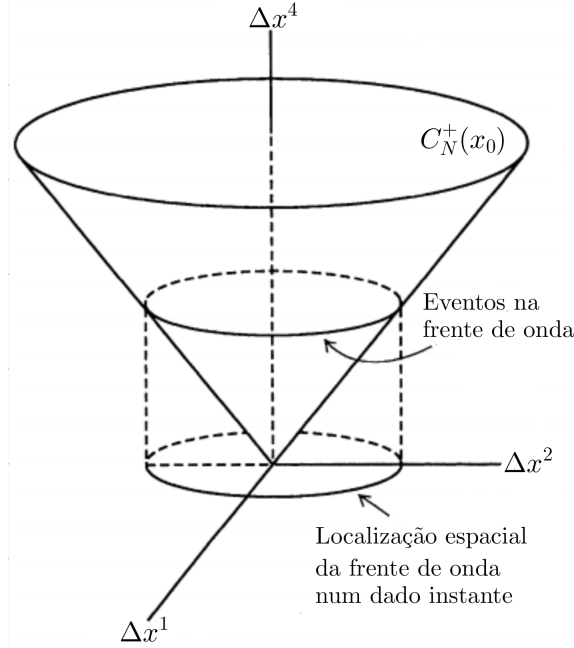


Fig. 5.3: Cone nulo futuro.

**Teorema 27.** *Sejam  $\Lambda = [\Lambda^a_b]_{a,b=1,2,3,4}$  um elemento de  $\mathcal{L}_{GH}$  e  $\{e_a\}_{a=1,2,3,4}$  uma base ortogonal de  $\mathcal{M}$ . Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i)  $\Lambda$  é ortocrónica.
- (ii)  $\Lambda$  preserva a orientação temporal de todos os vectores nulos diferentes de zero, ou seja, se  $v = v^a e_a$  é um vector nulo diferente de zero, então os números  $v^4$  e  $\hat{v}^4 = \Lambda^4_b v^b$  tem o mesmo sinal.
- (iii)  $\Lambda$  preserva a orientação temporal de todos os vectores do tipo-tempo.

*Demonstração.* Seja  $v = v^a e_a$  um vector do tipo-tempo ou nulo e diferente de zero. Pela Desigualdade de Schwartz em  $\mathbb{R}^3$  temos

$$\left(\Lambda^4_1 v^1 + \Lambda^4_2 v^2 + \Lambda^4_3 v^3\right)^2 \leq \sum_{i=1}^3 (\Lambda^4_i)^2 \sum_{i=1}^3 (v^i)^2. \quad (5.14)$$

Fazendo  $a = b = 4$  na igualdade (5.6), obtemos

$$(\Lambda^4_1)^2 + (\Lambda^4_2)^2 + (\Lambda^4_3)^2 - (\Lambda^4_4)^2 = -1, \quad (5.15)$$

o que implica  $(\Lambda^4_4)^2 > (\Lambda^4_1)^2 + (\Lambda^4_2)^2 + (\Lambda^4_3)^2$ . Além disso, como  $v$  é um vector do tipo-tempo ou nulo, tem-se  $(v^4)^2 \geq (v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2$ . Uma vez que  $v$  é diferente de zero, de (5.14) obtemos  $\left(\Lambda^4_1 v^1 + \Lambda^4_2 v^2 + \Lambda^4_3 v^3\right)^2 < \left(\Lambda^4_4 v^4\right)^2$ , que podemos escrever como

$$\left(\Lambda^4_1 v^1 + \Lambda^4_2 v^2 + \Lambda^4_3 v^3 - \Lambda^4_4 v^4\right) \left(\Lambda^4_1 v^1 + \Lambda^4_2 v^2 + \Lambda^4_3 v^3 + \Lambda^4_4 v^4\right) < 0. \quad (5.16)$$

Considere o vector  $w \in \mathcal{M}$  definido por  $w = \Lambda^4_1 e_1 + \Lambda^4_2 e_2 + \Lambda^4_3 e_3 + \Lambda^4_4 e_4$ . Por (5.15),  $w$  é um vector do tipo-tempo. Além disso, (5.16) pode agora ser escrito

$$(v \cdot w)\hat{v}^4 < 0. \quad (5.17)$$

Consequentemente,  $v \cdot w$  e  $\hat{v}^4$  possuem sinais opostos.

Mostremos que  $\Lambda^4_4 \geq 1$  se, e somente se,  $\hat{v}^4 \hat{v}^4 > 0$ . Suponhamos, primeiramente, que  $\Lambda^4_4 \geq 1$ . Se  $\hat{v}^4 > 0$ , então, pelo Teorema 26,  $v \cdot w < 0$  e portanto,  $\hat{v}^4 > 0$  por (5.17). Analogamente, se  $\hat{v}^4 < 0$ , então  $v \cdot w > 0$  e portanto,  $\hat{v}^4 < 0$ . Assim,  $\Lambda^4_4 \geq 1$  implica que  $\hat{v}^4 \hat{v}^4 > 0$ . Da mesma forma,  $\Lambda^4_4 \leq -1$  implica que  $\hat{v}^4 \hat{v}^4 < 0$ .  $\square$

**Observação 17.** Na verdade, mostramos também que, se  $\Lambda$  é não ortocrónica, ela inverte a orientação temporal de todos os vectores tipo-tempo e nulos diferentes de zero. Por esta razão, optamos por restringir a nossa atenção às transformações ortocrónicas de  $\mathcal{L}_{GH}$ .

Há ainda mais uma restrição que gostaríamos de impor às transformações de Lorentz.

**Definição 41.** Uma transformação de Lorentz  $\Lambda$  diz-se própria quando  $\det \Lambda = 1$  e imprópria quando  $\det \Lambda = -1$ .

**Proposição 23.** O conjunto  $\mathcal{L}$  formado pelas transformações de Lorentz própria e ortocrónica é um subgrupo de  $\mathcal{L}_{GH}$ .

**Nota 15.** Ao longo de todo o trabalho, muitas vezes, referimos a  $\mathcal{L}$  simplesmente como o grupo de Lorentz e seus elementos como transformações de Lorentz com o entendimento de que todas elas são próprias e ortocrónicas.

O conjunto  $\mathcal{R}$  formado pelas matrizes  $R = [R^a_b]$ , da forma

$$R = \begin{bmatrix} & & 0 \\ & [R^i_j] & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

onde  $[R^i_j]_{i,j=1,2,3}$  é uma matriz ortogonal unimodular, isto é,  $[R^i_j]^T = [R^i_j]^{-1}$  e  $\det[R^i_j] = 1$ , é um subgrupo de  $\mathcal{L}$ . Observe que  $R$  cumpre as condições de ortogonalidade (5.5) e, além disso,  $R^4_4 = 1$  e  $\det R = \det[R^i_j] = 1$ , o que mostra de facto que  $R \in \mathcal{L}$ .

A transformação de coordenadas associada a  $R$  corresponde fisicamente a uma rotação dos eixos espaciais num determinado referencial. Por essa razão,  $\mathcal{R}$  é chamado de subgrupo de rotação de  $\mathcal{L}$  e seus elementos são chamados de rotações em  $\mathcal{L}$ .

**Lema 6.** Seja  $\Lambda = [\Lambda^a_b]_{a,b=1,2,3,4}$  uma transformação de Lorentz própria e ortocrónica. As seguintes afirmações são equivalentes:

- (i)  $\Lambda$  é uma rotação,
- (ii)  $\Lambda^1_4 = \Lambda^2_4 = \Lambda^3_4 = 0$ ,

$$(iii) \Lambda^4_1 = \Lambda^4_2 = \Lambda^4_3 = 0,$$

$$(iv) \Lambda^4_4 = 1.$$

*Demonstração.* Tomando  $c = d = 4$  em (5.5) obtemos

$$(\Lambda^1_4)^2 + (\Lambda^2_4)^2 + (\Lambda^3_4)^2 - (\Lambda^4_4)^2 = -1. \quad (5.18)$$

Analogamente, fazendo  $a = b = 4$  em (5.6) obtemos

$$(\Lambda^4_1)^2 + (\Lambda^4_2)^2 + (\Lambda^4_3)^2 - (\Lambda^4_4)^2 = -1. \quad (5.19)$$

A equivalência entre (ii), (iii) e (iv) segue imediatamente de (5.18), (5.19) e do facto de  $\Lambda$  ser ortocrónica. Como por definição, uma rotação em  $\mathcal{L}$  satisfaz (ii), (iii) e (iv), portanto, para completar a demonstração devemos mostrar que se  $\Lambda$  satisfaz uma (e portanto todas) essas condições, então  $[\Lambda^i_j]_{i,j=1,2,3}$  é uma matriz ortogonal unimodular. Com efeito, a matriz  $\Lambda$  é da forma

$$\begin{bmatrix} \Lambda^1_1 & \Lambda^1_2 & \Lambda^1_3 & 0 \\ \Lambda^2_1 & \Lambda^2_2 & \Lambda^2_3 & 0 \\ \Lambda^3_1 & \Lambda^3_2 & \Lambda^3_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Aplicando o desenvolvimento laplaciano ao longo da quarta linha e tendo em conta que  $\Lambda$  é própria, obtemos  $\det[\Lambda^i_j]_{i,j=1,2,3} = \det \Lambda = 1$ , mostrando assim que  $[\Lambda^i_j]_{i,j=1,2,3}$  é unimodular. A ortogonalidade de  $[\Lambda^i_j]_{i,j=1,2,3}$ , decorre imediatamente de (5.9).  $\square$

## 5.4 Propriedades das transformações de Lorentz

Nesta secção, temos como objectivo principal derivar duas das consequências “mais notáveis” das transformações de Lorentz: a dilatação do tempo e relatividade da simultaneidade.

Consideremos dois referenciais inerciais  $\mathcal{S}$  e  $\hat{\mathcal{S}}$ , cujas bases são, respectivamente,  $\{e_a\}$  e  $\{\hat{e}_a\}$ . Dois eventos na linha do mundo de um ponto em repouso em  $\hat{\mathcal{S}}$ , têm coordenadas satisfazendo  $\Delta\hat{x}^1 = \Delta\hat{x}^2 = \Delta\hat{x}^3 = 0$  e  $\Delta\hat{x}^4$  é a separação temporal entre os dois eventos medido em  $\hat{\mathcal{S}}$ . De (5.12), obtém-se as diferenças de coordenadas em  $\mathcal{S}$ ,

$$\Delta x^b = \Lambda_a{}^b \Delta\hat{x}^a = \Lambda_4{}^b \Delta\hat{x}^4. \quad (5.20)$$

Tendo em conta (5.20) e sabendo que  $\Lambda^4_4$  e  $\Lambda_4{}^4$  são diferentes de zero, seguem-se que as razões

$$\frac{\Delta x^i}{\Delta x^4} = \frac{\Lambda_4{}^i}{\Lambda_4{}^4} = -\frac{\Lambda^4_i}{\Lambda^4_4}, \quad i = 1, 2, 3,$$

são constantes e independentes do ponto em repouso em  $\hat{\mathcal{S}}$  que escolhemos examinar. Fisicamente, estas relações são interpretadas como os componentes ordinários do *vector velocidade* de  $\hat{\mathcal{S}}$  em relação a  $\mathcal{S}$ :

$$\vec{u} = u^1 e_1 + u^2 e_2 + u^3 e_3, \quad \text{onde} \quad u^i = \frac{\Lambda_4{}^i}{\Lambda_4{}^4} = -\frac{\Lambda^4_i}{\Lambda^4_4}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (5.21)$$

Analogamente, o vector velocidade de  $\mathcal{S}$  relativamente a  $\hat{\mathcal{S}}$  é

$$\vec{u} = \hat{u}^1 \hat{e}_1 + \hat{u}^2 \hat{e}_2 + \hat{u}^3 \hat{e}_3, \quad \text{onde} \quad \hat{u}^i = \frac{\Lambda^i_4}{\Lambda^4_4} = -\frac{\Lambda_i^4}{\Lambda^4_4}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (5.22)$$

**Observação 18.** Temos que,  $\sum_{i=1}^3 (\Delta x^i / \Delta x^4)^2 = (\Lambda^4_4)^{-2} \sum_{i=1}^3 (\Lambda^4_i)^2 = (\Lambda^4_4)^{-2} ((\Lambda^4_4)^2 - 1)$ . Analogamente,  $\sum_{i=1}^3 (\Delta \hat{x}^i / \Delta \hat{x}^4)^2 = (\Lambda^4_4)^{-2} \cdot ((\Lambda^4_4)^2 - 1)$ . Fisicamente, interpretamos essas igualdades, afirmando que a velocidade de  $\hat{\mathcal{S}}$  em relação a  $\mathcal{S}$  e a velocidade de  $\mathcal{S}$  em relação a  $\hat{\mathcal{S}}$  têm o mesmo valor, que denotaremos por  $\beta$ . Assim,  $\beta^2 = 1 - (\Lambda^4_4)^{-2}$ , portanto, em particular,  $0 \leq \beta^2 < 1$  e  $\beta = 0$  se, e somente se,  $\Lambda$  é uma rotação. Resolvendo em ordem a  $\Lambda^4_4$  (e tomando a raiz quadrada positiva uma vez que  $\Lambda$  é ortocrónica) obtemos

$$\Lambda^4_4 = \Lambda_4^4 = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}} := \gamma. \quad (5.23)$$

Supondo que  $\Lambda$  não é uma rotação, podemos escrever  $\vec{u}$  como

$$\vec{u} = \beta \vec{d} = \beta (d^1 e_1 + d^2 e_2 + d^3 e_3), \quad d^i = u^i / \beta, \quad (5.24)$$

onde  $\vec{d}$  é o vector direcção de  $\hat{\mathcal{S}}$  em relação a  $\mathcal{S}$  e os  $d^i$  são interpretados como sendo os cossenos directores. Analogamente,

$$\vec{u} = \beta \vec{d} = \beta (\hat{d}^1 \hat{e}_1 + \hat{d}^2 \hat{e}_2 + \hat{d}^3 \hat{e}_3), \quad \hat{d}^i = \hat{u}^i / \beta. \quad (5.25)$$

**Nota 16.** Comparando (5.21) com (5.24) e usando (5.23) obtemos

$$\Lambda_4^i = -\Lambda^4_i = \beta (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}} d^i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (5.26)$$

e, analogamente

$$\Lambda^i_4 = -\Lambda_i^4 = \beta (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}} \hat{d}^i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (5.27)$$

As equações (5.23), (5.26) e (5.27) fornecem a última linha e a última coluna de  $\Lambda$  em termos de quantidades fisicamente mensuráveis e, mesmo nesta fase, algumas consequências cinemáticas interessantes se tornam aparentes. Com efeito, de (5.7) obtemos

$$\Delta \hat{x}^4 = -\beta \gamma (d^1 \Delta x^1 + d^2 \Delta x^2 + d^3 \Delta x^3) + \gamma \Delta x^4 \quad (5.28)$$

para quaisquer dois eventos. Considerando o caso especial de dois eventos na linha de mundo de um ponto em repouso em  $\mathcal{S}$ , ( $\Delta x^1 = \Delta x^2 = \Delta x^3 = 0$ ), obtemos de (5.28)

$$\Delta \hat{x}^4 = \gamma \Delta x^4 = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \Delta x^4. \quad (5.29)$$

Em particular,  $\Delta \hat{x}^4 = \Delta x^4$  se, e somente se,  $\Lambda$  for uma rotação. Qualquer movimento relativo de  $\mathcal{S}$  e  $\hat{\mathcal{S}}$  dá origem a um efeito de *dilatação do tempo* de acordo com a relação  $\Delta \hat{x}^4 > \Delta x^4$ .

**Nota 17.** O efeito da dilatação do tempo é inteiramente simétrico, isto é, para quaisquer dois eventos com  $\Delta\hat{x}^1 = \Delta\hat{x}^2 = \Delta\hat{x}^3 = 0$ ,

$$\Delta x^4 = \gamma \Delta \hat{x}^4 = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \Delta \hat{x}^4.$$

Vejam os dois casos especiais de (5.28). Suponhamos que os dois eventos são simultâneos em  $\mathcal{S}$ , ou seja, que  $\Delta x^4 = 0$ . Então

$$\Delta \hat{x}^4 = -\beta\gamma(d^1\Delta x^1 + d^2\Delta x^2 + d^3\Delta x^3). \quad (5.30)$$

Assumindo, novamente que  $\beta \neq 0$  obtemos, em geral, que  $\Delta \hat{x}^4 \neq 0$ , ou seja, que os dois eventos não são simultâneos em  $\hat{\mathcal{S}}$ . Na verdade,  $\mathcal{S}$  e  $\hat{\mathcal{S}}$  concordarão com a simultaneidade desses dois eventos se, e somente se, as localizações espaciais dos eventos em  $\Sigma$  tiverem uma relação muito especial com a direcção em  $\Sigma$  ao longo do qual  $\hat{\Sigma}$  está se movendo, a saber,

$$d^1\Delta x^1 + d^2\Delta x^2 + d^3\Delta x^3 = 0.$$

**Nota 18.** Quando,  $\Delta \hat{x}^4 \neq 0$  temos um exemplo do que é chamado de relatividade da simultaneidade.

Consideremos o subgrupo do grupo de Lorentz  $\mathcal{L}$  em que os cossenos directores são dados por  $d^1 = 1$ ,  $\hat{d}^1 = -1$  e  $d^2 = \hat{d}^2 = d^3 = \hat{d}^3 = 0$ . Assim os vectores são  $\vec{d} = e_1$  e  $\vec{\hat{d}} = -\hat{e}_1$ . Fisicamente, isso corresponde à situação na qual um observador em  $\mathcal{S}$  vê  $\hat{\Sigma}$  se movendo na direcção do eixo  $x^1$  positivo e um observador em  $\hat{\mathcal{S}}$  vê  $\Sigma$  se movendo na direcção do eixo  $\hat{x}^1$  negativo. As origens dos sistemas de coordenadas espaciais de  $\mathcal{S}$  e  $\hat{\mathcal{S}}$  coincidem em  $x^4 = \hat{x}^4 = 0$  e, imaginamos o movimento desses dois sistemas como sendo ao longo de seus eixos comuns  $x^1, \hat{x}^1$ . Agora, de (5.23), (5.26), (5.27) e das condições de ortogonalidade (5.5) e (5.6) descobrimos que a matriz da transformação de Lorentz  $\Lambda$  possui a seguinte forma

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & \Lambda^2_{22} & \Lambda^2_{23} & 0 \\ 0 & \Lambda^3_{22} & \Lambda^3_{23} & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}, \quad (5.31)$$

onde  $[\Lambda^i_j]_{i,j=2,3}$  é uma matriz ortogonal unimodular  $2 \times 2$ , isto é, uma rotação de  $\mathbb{R}^2$ .

Para descobrir as diferenças entre esses vários elementos de  $\mathcal{L}$  consideramos primeiro a escolha mais simples possível para a matriz ortogonal unimodular  $2 \times 2$   $[\Lambda^i_j]_{i,j=2,3}$ , ou seja, a matriz identidade. A transformação de Lorentz correspondente é

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}, \quad (5.32)$$

e a transformação de coordenadas associada é

$$\begin{aligned}
 \hat{x}^1 &= (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}x^1 - \beta(1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}x^4 \\
 \hat{x}^2 &= x^2 \\
 \hat{x}^3 &= x^3 \\
 \hat{x}^4 &= -\beta(1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}x^1 + (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}x^4.
 \end{aligned}
 \tag{5.33}$$

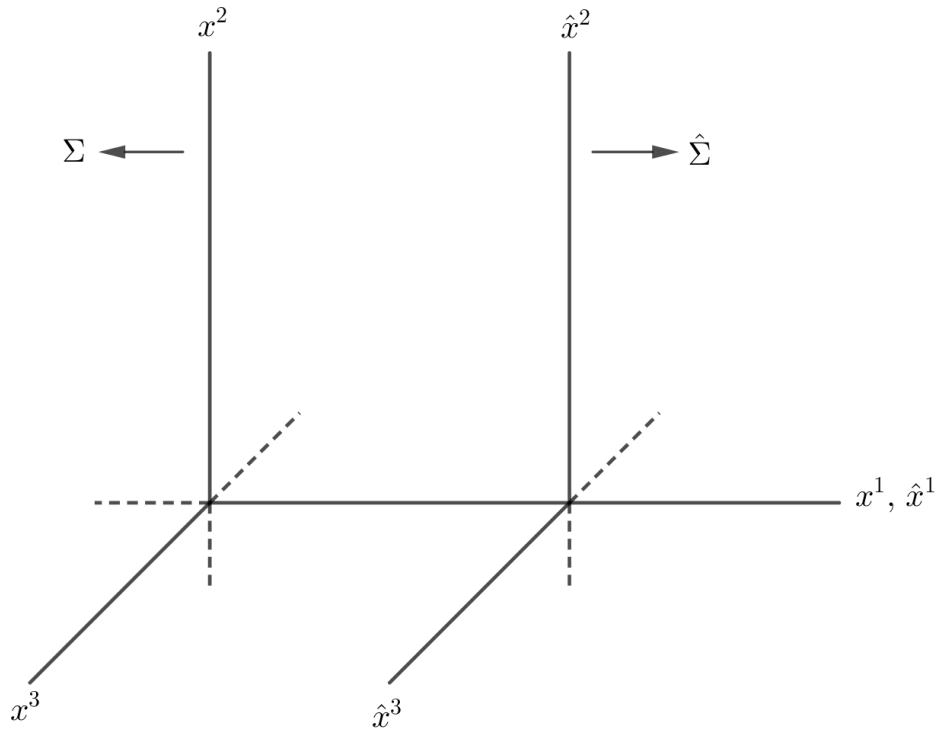


Fig. 5.4: Configuração padrão.

**Definição 42.** *Os referenciais com eixos espaciais relacionados, da maneira mostrada na Fig. 5.4, dizem-se estar na configuração padrão.*

Por (5.10) a inversa da transformação de Lorentz  $\Lambda$  definida por (5.32) é

$$\Lambda^{-1} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}
 \tag{5.34}$$

e a transformação de coordenadas correspondente é

$$\begin{aligned} x^1 &= (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}} \hat{x}^1 - \beta(1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}} \hat{x}^4 \\ x^2 &= \hat{x}^2 \\ x^3 &= \hat{x}^3 \\ x^4 &= -\beta(1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}} \hat{x}^1 + (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}} \hat{x}^4. \end{aligned} \quad (5.35)$$

**Definição 43.** Toda transformação de Lorentz da forma (5.32) ou (5.34), isto é, com  $\Lambda^4_4 = \Lambda^3_4 = \Lambda^4_2 = \Lambda^4_3 = 0$  e  $[\Lambda^i_j]_{i,j=2,3}$  igual à matriz identidade  $2 \times 2$ , é chamado de transformação especial de Lorentz.

**Nota 19.** Segundo Nabor [11], uma vez que  $\Lambda$  e  $\Lambda^{-1}$  diferem apenas nos sinais das entradas (1,4) e (4,1), é costume, quando se discute as transformações especiais de Lorentz, admitir que  $-1 < \beta < 1$ . Ao escolher  $\beta > 0$  quando  $\Lambda^1_4 < 0$  e  $\beta < 0$  quando  $\Lambda^1_4 > 0$ , todas as transformações especiais de Lorentz podem ser escritas na forma (5.32).

**Definição 44.** Para cada  $\beta \in \mathbb{R}$  com  $-1 < \beta < 1$ , definimos  $\gamma = \gamma(\beta) := (1 - \beta^2)^{-1/2}$ , e

$$\Lambda(\beta) := \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}. \quad (5.36)$$

A matriz  $\Lambda(\beta)$  é chamada de matriz de impulsão na direcção  $x^1$ .

**Proposição 24.** Se  $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ , com  $-1 < \beta_1 \leq \beta_2 < 1$ , então  $|(\beta_1 + \beta_2)/(1 + \beta_1\beta_2)| < 1$  e,

$$\Lambda(\beta_1)\Lambda(\beta_2) = \Lambda\left(\frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1\beta_2}\right) \quad (5.37)$$

*Demonstração.* A primeira parte da proposição decorre, imediatamente, do seguinte facto: se  $a$  é um número real satisfazendo  $-1 < a < 1$ , então a função  $f(x) = (x + a)/(1 + ax)$  é crescente para todo  $x \in [-1, 1]$ . Para provar a segunda parte da proposição, consideremos (5.36), onde  $\beta \in (-1, 1)$  e  $\gamma = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}} > 1$ . Definindo  $\beta_{1+2} := (\beta_1 + \beta_2)/(1 + \beta_1\beta_2)$ , obtemos

$$\begin{aligned} \gamma_{1+2} &= (1 - \beta_{1+2}^2)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1 + \beta_1\beta_2}{(1 - \beta_1^2 - \beta_2^2 + \beta_1^2\beta_2^2)^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

Multiplicando a matriz  $\Lambda(\beta_1)$  pela matriz  $\Lambda(\beta_2)$  vem:

$$\begin{aligned} \Lambda(\beta_1)\Lambda(\beta_2) &= \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 & -\beta_1\gamma_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta_1\gamma_1 & 0 & 0 & \gamma_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \gamma_2 & 0 & 0 & -\beta_2\gamma_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta_2\gamma_2 & 0 & 0 & \gamma_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \gamma_1\gamma_2(1 + \beta_1\beta_2) & 0 & 0 & -\gamma_1\gamma_2(\beta_1 + \beta_2) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma_1\gamma_2(\beta_1 + \beta_2) & 0 & 0 & \gamma_1\gamma_2(1 + \beta_1\beta_2) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Mostremos, agora, que a matriz acima define  $\Lambda(\beta_{1+2})$ . Com efeito,

$$\begin{aligned} \gamma_1\gamma_2(1 + \beta_1\beta_2) &= (1 - \beta_1^2)^{-\frac{1}{2}}(1 - \beta_2^2)^{-\frac{1}{2}}(1 + \beta_1\beta_2) \\ &= \frac{1 + \beta_1\beta_2}{(1 - \beta_1^2 - \beta_2^2 + \beta_1^2\beta_2^2)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \gamma_{1+2}. \\ -\gamma_1\gamma_2(\beta_1 + \beta_2) &= -(\beta_1 + \beta_2)(1 - \beta_1^2 - \beta_2^2 + \beta_1^2\beta_2^2)^{-\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1\beta_2} \frac{1 + \beta_1\beta_2}{(1 - \beta_1^2 - \beta_2^2 + \beta_1^2\beta_2^2)^{\frac{1}{2}}} \\ &= -\beta_{1+2}\gamma_{1+2}. \end{aligned}$$

o que prova o pretendido. □

**Nota 20.** *Segue-se da proposição 24 que a composição de duas impulsões na direcção  $x^1$  é uma outra impulsão na direcção  $x^1$ . Como  $\Lambda^{-1}(\beta) = \Lambda(-\beta)$ , o conjunto de todas as transformações especiais de Lorentz define um subgrupo de  $\mathcal{L}$ .*

A igualdade (5.37) admite a seguinte interpretação física: Se a velocidade de  $\hat{\mathcal{S}}$  em relação a  $\mathcal{S}$  é  $\beta_1$  e a velocidade de  $\hat{\mathcal{S}}$  em relação a  $\hat{\mathcal{S}}$  é  $\beta_2$ , então a velocidade de  $\hat{\mathcal{S}}$  em relação a  $\mathcal{S}$  não é  $\beta_1 + \beta_2$ , como era de se esperar, mas sim

$$\frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1\beta_2'}$$

que é sempre menor do que  $\beta_1 + \beta_2$ , desde que  $\beta_1\beta_2 \neq 0$ . A igualdade (5.37) é conhecida como a *adição relativista da fórmula de velocidades*.

**Observação 19.** *A proposição 24 confirma a suspeita, já indicada, pelo comportamento de (5.29) quando  $\beta \rightarrow 1$ , de que a velocidade de dois referenciais admissíveis é sempre menor do que a da luz (isto é, 1). Como qualquer partícula pode ser considerada em repouso nalgum referencial admissível, então essa partícula não pode atingir (ou exceder) a velocidade da luz em relação a um dado referencial admissível.*

Segundo Nabor [11], apesar da “não-aditividade” de velocidades na relatividade, muitas vezes é conveniente medir a velocidade com um parâmetro alternativo  $\theta$  que seja aditivo. Sendo assim, se a velocidade de  $\hat{\mathcal{S}}$  em relação a  $\mathcal{S}$  for  $\theta_1$  e a velocidade de  $\hat{\mathcal{S}}$  em relação a  $\hat{\mathcal{S}}$  for  $\theta_2$ , então a velocidade de  $\hat{\mathcal{S}}$  em relação a  $\mathcal{S}$  é  $\theta_1 + \theta_2$ . Uma vez que  $\theta$  mede a velocidade relativa, é razoável exigirmos que  $\beta$  seja uma função bijectiva de  $\theta$ , digamos,  $\beta = f(\theta)$ . Tendo em conta a aditividade e (5.37) a função  $f$  satisfaz a seguinte igualdade

$$f(\theta_1 + \theta_2) = \frac{f(\theta_1) + f(\theta_2)}{1 + f(\theta_1)f(\theta_2)}. \quad (5.38)$$

**Nota 21.** Tendo em conta a fórmula da adição para a tangente hiperbólica, (5.38) sugere a mudança de variável  $\beta = \tanh \theta$ . Assim, se  $\beta = \tanh \theta$ , então a fórmula hiperbólica da transformação de Lorentz  $\Lambda(\beta)$  é

$$L(\theta) = \begin{bmatrix} \cosh \theta & 0 & 0 & -\sinh \theta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh \theta & 0 & 0 & \cosh \theta \end{bmatrix}.$$

**Teorema 28.** Se  $\Lambda = [\Lambda^a_b]_{a,b=1,2,3,4}$  é uma transformação de Lorentz própria e ortocrónica, então existem um número  $\theta \in \mathbb{R}$  e duas rotações  $R_1, R_2 \in \mathcal{R}$  tal que  $\Lambda = R_1 L(\theta) R_2$ .

*Demonstração.* A demonstração desse teorema pode ser encontrada em [11]. □

Segundo o Teorema 28 uma transformação de Lorentz de  $\mathcal{S}$  para  $\hat{\mathcal{S}}$  pode ser efectuada da seguinte forma: (1) girar os eixos de  $\mathcal{S}$  de modo que a direcção positiva  $x^1$  coincida com a direcção do movimento de  $\hat{\Sigma}$  em relação a  $\Sigma$ ; (2) aplicar uma impulsão  $L(\theta)$ , para obter um novo sistema cujos eixos espaciais são paralelos aos eixos rotacionados de  $\mathcal{S}$ ; (3) girar esses eixos espaciais até coincidirem com os de  $\hat{\mathcal{S}}$ .

## Transformações spin e o grupo de Lorentz

Nesta secção, desenvolveremos uma técnica para construção e investigação das transformações de Lorentz. A ferramenta principal é o homomorfismo (chamado de *transformação spinor*) do grupo  $SL(2, \mathbb{C})$  no grupo de Lorentz  $\mathcal{L}$ . Com ele mostraremos que as transformações de Möbius determinada por um elemento  $A \in SL(2, \mathbb{C})$  possui o mesmo efeito em direções nulas passado que as transformação de Lorentz correspondente a  $A$  pela transformação spinor.

**Nota 22.** Denotemos por  $\mathbb{M}(2, \mathbb{C})$  o conjunto de todas as matrizes  $2 \times 2$

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

com entradas complexas. A transposta conjugada da matriz  $A$ , que denotaremos por  $A^*$ , é definida por

$$A^* = \begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{21} \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} \end{bmatrix}.$$

**Definição 45.** Uma matriz  $H = [h_{ij}] \in \mathbb{M}(2, \mathbb{C})$  diz-se *hermética* quando  $H^* = H$ , isto é, quando  $h_{ij} = \bar{h}_{ji}$ . Denotaremos por  $\mathcal{H}_2$  o conjunto de todas as matrizes herméticas.

**Proposição 25.** Toda matriz hermética  $H \in \mathcal{H}_2$  pode ser expresso, de modo único, na forma

$$H = \begin{bmatrix} x^3 + x^4 & x^1 + ix^2 \\ x^1 - ix^2 & -x^3 + x^4 \end{bmatrix}, \quad (6.1)$$

onde  $x^a$ ,  $a = 1, 2, 3, 4$ , são números reais.

*Demonstração.* As matrizes herméticas,

$$\delta_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \delta_2 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}, \quad \delta_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \delta_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

formam uma base de  $\mathcal{H}_2$  como facilmente se verifica. Assim, toda matriz  $H \in \mathcal{H}_2$ , se escreve de modo único, como combinação linear  $H = x^1\delta_1 + x^2\delta_2 + x^3\delta_3 + x^4\delta_4$ .  $\square$

**Definição 46.** Os elementos de  $SL(2, \mathbb{C})$ , conjunto de todas as matrizes  $2 \times 2$  com entradas complexas e determinante igual a 1, chamam-se transformações spin.

**Proposição 26.** Se  $A \in SL(2, \mathbb{C})$  e  $H \in \mathcal{H}_2$ , então  $AHA^* \in \mathcal{H}_2$ .

*Demonstração.* Com efeito,  $(AHA^*)^* = (A^*)^*(AH)^* = AH^*A^* = AHA^*$ .  $\square$

Assim, para cada  $A \in SL(2, \mathbb{C})$  obtemos uma transformação linear  $M_A : \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_2$  definida por

$$M_A(H) = AHA^*,$$

onde

$$\det M_A(H) = (\det A)(\det H)(\det A^*) = \det H.$$

A proposição 25 permite-nos escrever  $M_A(H)$  na forma

$$M_A(H) = \begin{bmatrix} \hat{x}^3 + \hat{x}^4 & \hat{x}^1 + i\hat{x}^2 \\ \hat{x}^1 - i\hat{x}^2 & -\hat{x}^3 + \hat{x}^4 \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

onde  $\hat{x}^a$ ,  $a = 1, 2, 3, 4$  são números reais. Calculando os determinantes de (6.1) e (6.2) obtemos

$$(\hat{x}^1)^2 + (\hat{x}^2)^2 + (\hat{x}^3)^2 - (\hat{x}^4)^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - (x^4)^2. \quad (6.3)$$

Assim, a transformação linear  $[x^a] \rightarrow [\hat{x}^a]$  definida por

$$\begin{bmatrix} \hat{x}^3 + \hat{x}^4 & \hat{x}^1 + i\hat{x}^2 \\ \hat{x}^1 - i\hat{x}^2 & -\hat{x}^3 + \hat{x}^4 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x^3 + x^4 & x^1 + ix^2 \\ x^1 - ix^2 & -x^3 + x^4 \end{bmatrix} A^*, \quad (6.4)$$

preserva a forma quadrática  $\eta_{ab}x^ax^b$ . De acordo com o Lema 5, a matriz desta transformação é, portanto, uma transformação geral de Lorentz. Vamos construir esta matriz, explicitamente, a partir das entradas da matriz

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}.$$

Definindo  $h_{11} = x^3 + x^4$ ,  $h_{12} = x^1 + ix^2$ ,  $h_{21} = x^1 - ix^2$ ,  $h_{22} = -x^3 + x^4$  (e  $\hat{h}_{11} = \hat{x}^3 + \hat{x}^4$ ,  $\hat{h}_{12} = \hat{x}^1 + i\hat{x}^2$ ,  $\hat{h}_{21} = \hat{x}^1 - i\hat{x}^2$ ,  $\hat{h}_{22} = -\hat{x}^3 + \hat{x}^4$ ) obtemos

$$\begin{bmatrix} h_{11} \\ h_{12} \\ h_{21} \\ h_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & i & 0 & 0 \\ 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{bmatrix}$$

ou mais compactamente como

$$[h_{ij}] = G[x^i]$$

e, analogamente,  $[\hat{h}_{ij}] = G[\hat{x}^i]$ . Além disso, é fácil verificar que

$$G^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -i & i & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Observação 20.** Escrevendo o produto  $AHA^*$  explicitamente, obtemos que  $M_A(H)$  é equivalente a

$$\begin{bmatrix} \hat{h}_{11} \\ \hat{h}_{12} \\ \hat{h}_{21} \\ \hat{h}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\bar{\alpha} & \alpha\bar{\beta} & \bar{\alpha}\beta & \beta\bar{\beta} \\ \alpha\bar{\gamma} & \alpha\bar{\delta} & \beta\bar{\gamma} & \beta\bar{\delta} \\ \bar{\alpha}\gamma & \bar{\beta}\gamma & \bar{\alpha}\delta & \bar{\beta}\delta \\ \gamma\bar{\gamma} & \gamma\bar{\delta} & \bar{\gamma}\delta & \delta\bar{\delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11} \\ h_{12} \\ h_{21} \\ h_{22} \end{bmatrix}$$

que escreveremos de forma mais concisa como

$$[\hat{h}_{ij}] = R_A [h_{ij}].$$

Consequentemente, a transformação linear  $[x^a] \rightarrow [\hat{x}^a]$  definida por (6.4) é dada por

$$[x^a] \xrightarrow{G} [h_{ij}] \xrightarrow{R_A} [\hat{h}_{ij}] \xrightarrow{G^{-1}} [\hat{x}^a] \quad (6.5)$$

e a transformação de Lorentz  $\Lambda_A$  determinada via (6.4) (ou (6.5)) por  $A$  é

$$\Lambda_A = G^{-1}R_AG.$$

Calculando o produto  $G^{-1}R_AG$ , explicitamente, obtemos as 16 entradas  $\Lambda^a_b$  de  $\Lambda_A$ ,

$$\begin{aligned} \Lambda^1_1 &= \frac{1}{2}(\alpha\bar{\delta} + \bar{\beta}\gamma + \beta\bar{\gamma} + \bar{\alpha}\delta), & \Lambda^1_2 &= \frac{i}{2}(\alpha\bar{\delta} + \bar{\beta}\gamma - \beta\bar{\gamma} - \bar{\alpha}\delta), \\ \Lambda^2_1 &= \frac{i}{2}(-\alpha\bar{\delta} + \bar{\beta}\gamma - \beta\bar{\gamma} + \bar{\alpha}\delta), & \Lambda^2_2 &= \frac{1}{2}(\alpha\bar{\delta} - \bar{\beta}\gamma - \beta\bar{\gamma} + \bar{\alpha}\delta), \\ \Lambda^3_1 &= \frac{1}{2}(\alpha\bar{\beta} - \gamma\bar{\delta} + \bar{\alpha}\beta - \bar{\gamma}\delta), & \Lambda^3_2 &= \frac{i}{2}(\alpha\bar{\beta} - \gamma\bar{\delta} - \bar{\alpha}\beta + \bar{\gamma}\delta), \\ \Lambda^4_1 &= \frac{1}{2}(\alpha\bar{\beta} + \gamma\bar{\delta} + \bar{\alpha}\beta + \bar{\gamma}\delta), & \Lambda^4_2 &= \frac{i}{2}(\alpha\bar{\beta} + \gamma\bar{\delta} - \bar{\alpha}\beta - \bar{\gamma}\delta), \\ \Lambda^1_3 &= \frac{1}{2}(\alpha\bar{\gamma} + \bar{\alpha}\gamma - \beta\bar{\delta} - \bar{\beta}\delta), & \Lambda^1_4 &= \frac{1}{2}(\alpha\bar{\gamma} + \bar{\alpha}\gamma + \beta\bar{\delta} + \bar{\beta}\delta), \\ \Lambda^2_3 &= \frac{i}{2}(\alpha\bar{\gamma} - \bar{\alpha}\gamma - \beta\bar{\delta} + \bar{\beta}\delta), & \Lambda^2_4 &= \frac{i}{2}(\alpha\bar{\gamma} - \bar{\alpha}\gamma + \beta\bar{\delta} + \bar{\beta}\delta), \\ \Lambda^3_3 &= \frac{1}{2}(\alpha\bar{\alpha} - \gamma\bar{\gamma} - \beta\bar{\beta} + \delta\bar{\delta}), & \Lambda^3_4 &= \frac{1}{2}(\alpha\bar{\alpha} - \gamma\bar{\gamma} + \beta\bar{\beta} - \delta\bar{\delta}), \\ \Lambda^4_3 &= \frac{1}{2}(\alpha\bar{\alpha} + \gamma\bar{\gamma} - \beta\bar{\beta} - \delta\bar{\delta}), & \Lambda^4_4 &= \frac{1}{2}(\alpha\bar{\alpha} + \gamma\bar{\gamma} + \beta\bar{\beta} + \delta\bar{\delta}). \end{aligned} \quad (6.6)$$

**Observação 21.** A entrada (4,4) de  $\Lambda_A$  é um número positivo, portanto  $\Lambda_A$  é ortocrónica. Além disso,

$$\begin{aligned} \det \Lambda_A &= \det(G^{-1}R_AG) \\ &= (\det G^{-1})(\det R_A)(\det G) \\ &= \det R_A \\ &= (\alpha\bar{\delta} - \beta\bar{\gamma})^2(\bar{\alpha}\bar{\delta} - \bar{\beta}\bar{\gamma})^2 \\ &= 1, \end{aligned}$$

de modo que, a transformação de Lorentz  $\Lambda_A$  é própria.

**Definição 47.** Chama-se transformação spinor a correspondência definida em  $SL(2, \mathbb{C})$  e com valores em  $\mathcal{L}$ , que associa a cada matriz  $A \in SL(2, \mathbb{C})$ , uma única matriz  $\Lambda_A \in \mathcal{L}$ .

**Proposição 27.** A transformação spinor é um homomorfismo de  $SL(2, \mathbb{C})$  em  $\mathcal{L}$ , isto é, preserva a multiplicação de matrizes.

*Demonstração.* Com efeito, se  $A, B \in SL(2, \mathbb{C})$ , então

$$\Lambda_A \Lambda_B = (G^{-1} R_A G)(G^{-1} R_B G) = G^{-1} (R_A R_B) G. \quad (6.7)$$

Como

$$M_{AB}(H) = ABHB^*A^* = A(BHB^*)A^* = M_A(BHB^*) = M_A(M_B(H)),$$

concluimos que  $M_{AB} = M_A \circ M_B$  e portanto  $R_{AB} = R_A R_B$ . Assim, de (6.7) obtemos que

$$\Lambda_A \Lambda_B = G^{-1} R_{AB} G = \Lambda_{AB}, \quad (6.8)$$

o que prova o pretendido.  $\square$

A transformação spinor é, um homomorfismo, não injectiva, pois é claro de (6.6) que tanto  $A$  quanto  $-A$  tem a mesma imagem em  $\mathcal{L}$ . Na verdade, a transformação spinor é “dois-para-um”, isto é, se  $A, B \in SL(2, \mathbb{C})$  e  $\Lambda_A = \Lambda_B$ , então  $A = \pm B$ .

**Proposição 28.** Se  $\theta$  é um número real, então a matriz  $A(\theta) \in SL(2, \mathbb{C})$ , onde

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} \cosh \frac{\theta}{2} & \sinh \frac{\theta}{2} \\ \sinh \frac{\theta}{2} & \cosh \frac{\theta}{2} \end{bmatrix}.$$

Além disso,

$$\Lambda_{A(\theta)} = L(\theta) = \begin{bmatrix} \cosh \theta & 0 & 0 & -\sinh \theta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh \theta & 0 & 0 & \cosh \theta \end{bmatrix}.$$

*Demonstração.* De facto,  $A(\theta) \in SL(2, \mathbb{C})$  uma vez que

$$\det(A(\theta)) = \cosh^2(\theta/2) - \sinh^2(\theta/2) = 1.$$

A demonstração da segunda afirmação, embora simples, envolve bastante cálculo, de modo que, não a faremos aqui. De todo modo, para obter  $\Lambda_{A(\theta)}$ , substituímos as entradas de  $A(\theta)$  em (6.6) e simplificamos os cálculos usando as relações trigonométricas hiperbólicas.  $\square$

**Definição 48.** Um elemento  $A \in SL(2, \mathbb{C})$  diz-se unitário quando  $A^{-1} = A^*$ . Denotaremos por  $SU_2$  o conjunto de todas as matrizes unitárias de  $SL(2, \mathbb{C})$ .

**Proposição 29.** O conjunto  $SU_2$  é um subgrupo de  $SL(2, \mathbb{C})$  e, além disso, se  $A \in SU_2$ , então  $\Lambda_A$  é uma rotação em  $\mathcal{L}$ .

*Demonstração.* Se  $A, B \in SU_2$ , então  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = B^*A^* = (AB)^*$ . Além disso,  $A^{-1} = A^* \Rightarrow (A^{-1})^{-1} = (A^*)^{-1} \Rightarrow A = (A^*)^{-1}$ , o que mostra que  $SU_2$  é um subgrupo de  $SL(2, \mathbb{C})$ . Para mostrar que  $\Lambda_A$  é uma rotação em  $\mathcal{L}$ , observamos que se  $A \in SU_2$ , então  $AA^* = I$ . Definindo  $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ , obtemos  $\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} = 1$  e  $\gamma\bar{\gamma} + \delta\bar{\delta} = 1$ . A entrada  $\Lambda^4_4$  da matriz  $\Lambda_A$  é dada por

$$\frac{1}{2}(\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} + \gamma\bar{\gamma} + \delta\bar{\delta}) = \frac{1}{2}(1 + 1) = 1,$$

e, portanto, pelo Lema 6,  $\Lambda_A$  é uma rotação.  $\square$

As demonstrações dos Lemas 7 e 8 são muito “envolvidas” e, portanto, não as faremos aqui, de todo modo, elas podem ser encontradas, por exemplo, em [6].

**Lema 7.** *Toda matriz  $A \in SU_2$  pode ser escrita, em termos dos seus “ângulos de Euler”  $\phi_1, \theta$  e  $\phi_2$ , na forma*

$$A = \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} e^{\frac{1}{2}i(\phi_1 + \phi_2)} & i \sin \frac{\theta}{2} e^{-\frac{1}{2}i(\phi_2 - \phi_1)} \\ i \sin \frac{\theta}{2} e^{\frac{1}{2}i(\phi_2 - \phi_1)} & \cos \frac{\theta}{2} e^{-\frac{1}{2}i(\phi_1 + \phi_2)} \end{bmatrix}.$$

**Lema 8.** *Toda matriz de rotação  $[R^i_j]_{i,j=1,2,3}$  pode ser representada, em termos dos seus “ângulos de Euler”  $\phi_1, \theta$  e  $\phi_2$ , na forma*

$$[R^i_j] = \begin{bmatrix} \chi & \xi & \sin \phi_2 \sin \theta \\ \mu & \omega & -\cos \phi_2 \sin \theta \\ \sin \theta \sin \phi_1 & \sin \theta \cos \phi_1 & \cos \theta \end{bmatrix}$$

onde:

$$\begin{aligned} \chi &= \cos \phi_1 \cos \phi_2 - \cos \theta \sin \phi_1 \sin \phi_2 \\ \xi &= -\cos \phi_2 \sin \phi_1 - \cos \theta \sin \phi_2 \cos \phi_1 \\ \mu &= \sin \phi_2 \cos \phi_1 + \cos \theta \cos \phi_2 \sin \phi_1 \\ \omega &= -\sin \phi_2 \sin \phi_1 + \cos \theta \cos \phi_1 \cos \phi_2. \end{aligned}$$

**Proposição 30.** *A transformação spinor leva  $SU_2$  em  $\mathcal{R}$ , ou seja, se  $A \in SU_2$  então*

$$\Lambda_A = \begin{bmatrix} & & 0 \\ [R^i_j] & & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{R}.$$

*Demonstração.* Com efeito, basta combinar a definição de  $\Lambda_A$  e os Lemas 7 e 8.  $\square$

**Proposição 31.** *A transformação spinor é sobrejectiva, isto é, toda transformação de Lorentz  $\Lambda$ , própria e ortocrónica é  $\Lambda_{\pm A}$  para algum  $A \in SL(2, \mathbb{C})$ .*

*Demonstração.* Pelo Teorema 28, existe um número real  $\theta$  e duas rotações  $R_1$  e  $R_2$  em  $\mathcal{L}$  tal que  $\Lambda = R_1 L(\theta) R_2$ . Existem elementos  $A_1, A_2 \in SU_2 \subset SL(2, \mathbb{C})$  tais que  $\Lambda_{A_1} = R_1$  e  $\Lambda_{A_2} = R_2$ . Além disso, pela Proposição 28,  $\Lambda_{A_\theta} = L(\theta)$ . Como a transformação spinor é um homomorfismo obtemos,  $\Lambda_{A_1 A(\theta) A_2} = \Lambda_{A_1} \Lambda_{A(\theta)} \Lambda_{A_2} = R_1 L(\theta) R_2 = \Lambda$ .  $\square$

Os elementos de  $SL(2, \mathbb{C})$  geram as transformações de Lorentz e, além disso, definem as transformações de Möbius (normalizada) no plano complexo ampliado. Exploraremos uma conexão bastante surpreendente entre essas duas actividades. Primeiro, porém, alguns preliminares.

Até agora, pensamos numa transformação de Lorentz  $\Lambda$ , como uma matriz de transformação de coordenadas, comumente designada de transformação *passiva* (fixa os pontos e muda os sistemas de coordenadas). A transformação  $\Lambda$  admite uma interpretação como uma transformação *activa* (fixa o sistema de coordenadas e move os pontos desse sistema).

Consideremos uma transformação ortogonal  $L : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  e uma base  $\{e_a\}$ . Se escrevermos  $e_b = \Lambda^a_b \hat{e}_a$ , então a transformação de Lorentz correspondente é definida por

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda^1_1 & \Lambda^1_2 & \Lambda^1_3 & \Lambda^1_4 \\ \Lambda^2_1 & \Lambda^2_2 & \Lambda^2_3 & \Lambda^2_4 \\ \Lambda^3_1 & \Lambda^3_2 & \Lambda^3_3 & \Lambda^3_4 \\ \Lambda^4_1 & \Lambda^4_2 & \Lambda^4_3 & \Lambda^4_4 \end{bmatrix}.$$

**Observação 22.** Para cada  $x \in \mathcal{M}$ , podemos escrever  $x = x^a e_a = \hat{x}^a \hat{e}_a$ , onde  $[\hat{x}^a] = \Lambda[x^a]$ . Desse modo  $\Lambda$  age nas coordenadas de um ponto para dar as coordenadas do mesmo ponto num novo sistema de coordenadas. Como  $L^{-1}x = L^{-1}(\hat{x}^a \hat{e}_a) = \hat{x}^a L^{-1} \hat{e}_a = \hat{x}^a e_a$ , podemos ver que  $\Lambda$  age nas coordenadas  $[x^a]$  de um ponto relativo a  $\{e_a\}$  e produz as coordenadas  $[\hat{x}^a]$  de um novo ponto no mesmo sistema de coordenadas.

**Definição 49.** Dado  $x \in C_N^-(0)$ , chama-se direcção nula passado em  $x$  ao conjunto

$$\mathcal{R}_x^- = \{\alpha x : \alpha \geq 0\}.$$

**Observação 23.** Se  $L : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  é uma transformação ortogonal correspondente a uma transformação de Lorentz ortocrónica  $\Lambda$ , então  $x \in C_N^-(0) \Rightarrow Lx \in C_N^-(0)$  de modo que  $\mathcal{R}_{Lx}^-$  está definido. Além disso,  $L(\mathcal{R}_x^-) = L(\{\alpha x : \alpha \geq 0\}) = \{\alpha Lx : \alpha \geq 0\} = \{\alpha Lx : \alpha \geq 0\} = \mathcal{R}_{Lx}^-$ . Consequentemente,  $L$  (e, portanto,  $L^{-1}$  e assim também  $\Lambda$ ) pode ser considerada como uma transformação em direcções nulas passado.

A fim de estabelecer uma conexão entre as transformações de Lorentz e as transformações de Möbius, observamos que existe uma correspondência entre as direcções nulas passado e os pontos da esfera de Riemann. De modo específico, fixamos uma base  $\{e_a\}$  de  $\mathcal{M}$  e denotamos por  $S^-$  a intersecção do cone nulo  $C_N^-(0)$  com o hiperplano  $x^4 = -1$ :

$$S^- = \{x = x^a e_a : x \in C_N^-(0), x^4 = -1\}.$$

**Observação 24.** Uma vez que,  $x \in C_N^-(0) \Leftrightarrow (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = (x^4)^2$ , obtemos que  $S^- = \{x = x^a e_a : (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1\}$  é uma cópia da esfera  $\mathcal{S}^2$  no espaço tridimensional  $x^4 = -1$  (veja-se a Fig. 6.1).

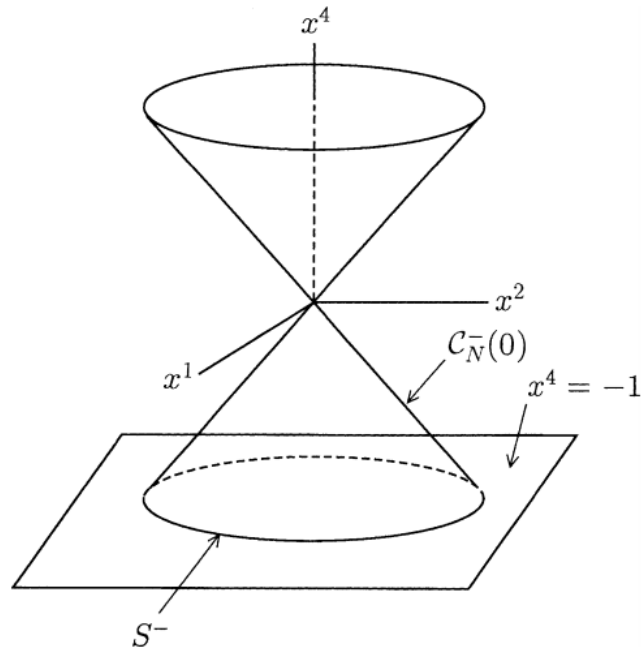


Fig. 6.1: A esfera  $S^-$ .

Da definição de direcção nula passado e de  $S^-$  podemos concluir imediatamente a seguinte proposição:

**Proposição 32.** *Qualquer direcção nula passado intersecta  $S^-$  num único ponto. Reciprocamente, cada ponto em  $S^-$  determina uma única direcção nula passado em  $\mathcal{M}$ .*

Para obter uma representação explícita para a direcção nula passado, vamos considerar  $S^-$  como a esfera de Riemann e identificar os seus pontos com números complexos ampliados via projecção estereográfica. Para este fim, tomamos  $N = (0, 0, 1, -1)$  como pólo norte de  $S^-$  e projectamos cada ponto de  $S^-$  no plano bidimensional  $C$  em  $x^4 = -1$  dado por  $x^3 = 0$  (veja-se a Fig. 6.2). A relação entre um ponto  $P = (x^1, x^2, x^3, -1)$ , diferente de  $N$ , em  $S^-$  e sua imagem estereográfica  $\zeta$  no plano complexo é dada por:

$$\zeta = \frac{x^1 + ix^2}{1 - x^3}, \quad (6.9)$$

$$x^1 = \frac{\zeta + \bar{\zeta}}{\zeta\bar{\zeta} + 1},$$

$$x^2 = \frac{\zeta - \bar{\zeta}}{i(\zeta\bar{\zeta} + 1)}, \quad (6.10)$$

$$x^3 = \frac{\zeta\bar{\zeta} - 1}{\zeta\bar{\zeta} + 1},$$

$$x^4 = -1.$$

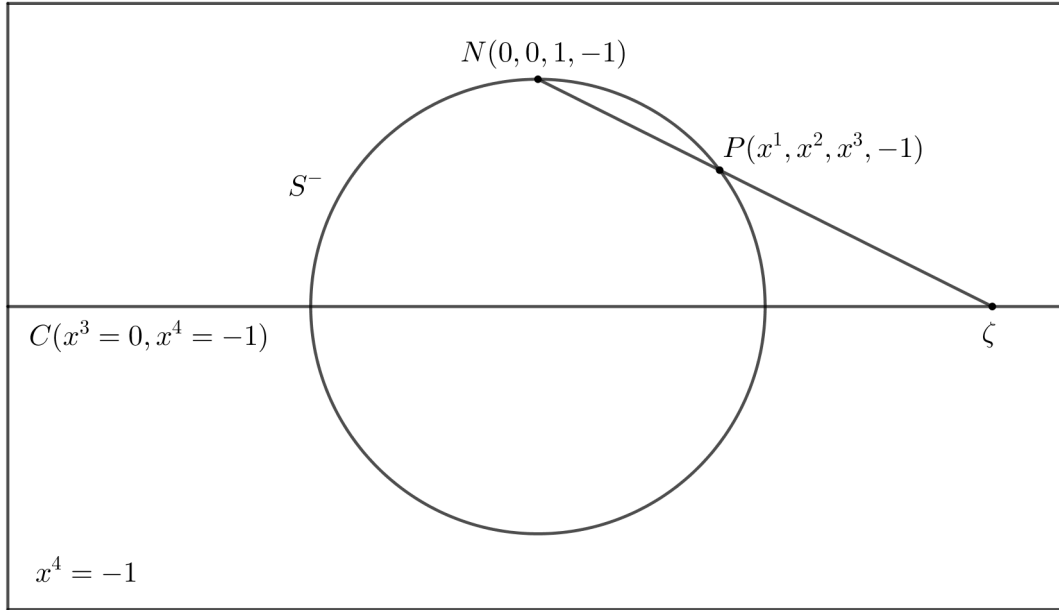


Fig. 6.2: Projecção estereográfica em  $S^-$ .

**Nota 23.** O pólo norte  $N = (0, 0, 1, -1)$  em  $S^-$  corresponde ao ponto no infinito no plano complexo ampliado  $\widehat{\mathbb{C}}$ . Para evitar a necessidade de lidar com o ponto no infinito, representaremos os números complexos  $\zeta \in \widehat{\mathbb{C}}$  nas chamadas “coordenadas homogêneas”, isto é, por um par  $\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}$  de números complexos, não ambos nulos, satisfazendo

$$\zeta = \frac{\xi}{\eta},$$

(qualquer par  $\begin{bmatrix} \xi \\ 0 \end{bmatrix}$  com  $\xi \neq 0$  representa o ponto no infinito).

Usando as coordenadas homogêneas, podemos reescrever (6.10), do seguinte modo:

$$\begin{aligned} x^1 &= \frac{\xi\bar{\eta} + \bar{\xi}\eta}{\xi\bar{\xi} + \eta\bar{\eta}} \\ x^2 &= \frac{\xi\bar{\eta} - \bar{\xi}\eta}{i(\xi\bar{\xi} + \eta\bar{\eta})} \\ x^3 &= \frac{\xi\bar{\xi} - \eta\bar{\eta}}{\xi\bar{\xi} + \eta\bar{\eta}} \\ x^4 &= -1. \end{aligned} \tag{6.11}$$

**Observação 25.** Qualquer par,  $\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}$  de números complexos, com  $\xi^2 + \eta^2 \neq 0$ , corresponde a um ponto  $P = (x^1, x^2, x^3, -1) \in S^-$  dado por (6.11). Estando  $P$  em  $S^-$  (e, portanto, em  $C_N^-(0)$ ), ele determina uma direcção nula passado  $R_P^-$ , que denotaremos por  $R_{\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}}^-$ .

Multiplicando  $P$  pelo número real positivo  $\xi\bar{\xi} + \eta\bar{\eta}$  obtemos o ponto  $X = X^a e_a \in C_N^-(0)$ , onde

$$\begin{aligned} X^1 &= \xi\bar{\eta} + \bar{\xi}\eta, & X^3 &= \xi\bar{\xi} - \eta\bar{\eta}, \\ X^2 &= \frac{1}{i}(\xi\bar{\eta} - \bar{\xi}\eta), & X^4 &= -(\xi\bar{\xi} + \eta\bar{\eta}). \end{aligned} \quad (6.12)$$

Portanto, o ponto  $X$  determina uma direcção nula passado  $R_X^-$ , onde

$$R_X^- = R_{\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}}^- \quad (6.13)$$

Se  $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$ , então  $A$  define uma função que leva qualquer par  $\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}$ , com  $\xi^2 + \eta^2 \neq 0$ , num outro par, que denotaremos por

$$\begin{bmatrix} \hat{\xi} \\ \hat{\eta} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\xi + \beta\eta \\ \gamma\xi + \delta\eta \end{bmatrix}. \quad (6.14)$$

**Observação 26.** Considerando a matriz  $A$  como uma transformação em  $S^-$  (ou  $\widehat{\mathbb{C}}$ ), (6.14) define uma transformação de Möbius. Com efeito, em termos de números complexos ampliados  $\zeta = \xi/\eta$ , (6.14) é equivalente a

$$\hat{\zeta} = \frac{\alpha\zeta + \beta}{\gamma\zeta + \delta}.$$

O par  $\begin{bmatrix} \hat{\xi} \\ \hat{\eta} \end{bmatrix}$  determina, via (6.12), um ponto  $\hat{X} \in C_N^-(0)$  e este, por sua vez, determina uma direcção nula passado  $R_{\hat{X}}^- = R_{\begin{bmatrix} \hat{\xi} \\ \hat{\eta} \end{bmatrix}}^-$ . Por outro lado, a matriz  $A$  também dá origem,

através da transformação spinor, a uma transformação de Lorentz própria e ortocrónica  $\Lambda_A$ , que aplica cada  $X$  em  $\Lambda_A X \in C_N^-(0)$ . Mostremos que  $\hat{X}$  e  $\Lambda_A X$  são, de facto, o mesmo ponto.

**Teorema 29.** O efeito da transformação de Möbius (6.14) determinada por  $A$  nas direcções nulas passado é o mesmo que o efeito da transformação de Lorentz  $\Lambda_A$  determinada por  $A$ , isto é

$$R_{\begin{bmatrix} \hat{\xi} \\ \hat{\eta} \end{bmatrix}}^- = R_{\Lambda_A X}^- \quad (6.15)$$

*Demonstração.* Resolvendo (6.12) para os quatro produtos  $\xi\bar{\eta}$ ,  $\bar{\xi}\eta$ ,  $\xi\bar{\xi}$  e  $\eta\bar{\eta}$ , obtemos

$$\begin{aligned}\xi\bar{\xi} &= \frac{1}{2}(X^3 + X^4), & \xi\bar{\eta} &= \frac{1}{2}(X^1 + iX^2), \\ \bar{\xi}\eta &= \frac{1}{2}(X^1 - iX^2), & \eta\bar{\eta} &= \frac{1}{2}(-X^3 + X^4),\end{aligned}$$

de modo que,

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} X^3 + X^4 & X^1 + iX^2 \\ X^1 - iX^2 & -X^3 + X^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi\bar{\xi} & \xi\bar{\eta} \\ \bar{\xi}\eta & \eta\bar{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\xi} & \bar{\eta} \end{bmatrix}. \quad (6.16)$$

O ponto  $\hat{X} = \hat{X}^a e_a$ , correspondente ao ponto  $X = X^a e_a$ , dado por (6.12) com chapéus satisfaz a condição (6.16) com chapéus, ou seja,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \hat{X}^3 + \hat{X}^4 & \hat{X}^1 + i\hat{X}^2 \\ \hat{X}^1 - i\hat{X}^2 & -\hat{X}^3 + \hat{X}^4 \end{bmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \hat{X}^3 + \hat{X}^4 & \hat{X}^1 + i\hat{X}^2 \\ \hat{X}^1 - i\hat{X}^2 & -\hat{X}^3 + \hat{X}^4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \hat{\xi} \\ \hat{\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\bar{\xi}} & \hat{\bar{\eta}} \end{bmatrix}^* \\ &= \begin{bmatrix} \hat{\bar{\xi}} & \hat{\bar{\eta}} \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} \hat{\xi} \\ \hat{\eta} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \hat{\xi} \\ \hat{\eta} \end{bmatrix} \left[ A \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \right]^* \\ &= A \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \left[ \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \right]^* A^* \\ &= A \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\xi} & \bar{\eta} \end{bmatrix} A^* \\ &= \frac{1}{2} A \begin{bmatrix} X^3 + X^4 & X^1 + iX^2 \\ X^1 - iX^2 & -X^3 + X^4 \end{bmatrix} A^*.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{bmatrix} \hat{X}^3 + \hat{X}^4 & \hat{X}^1 + i\hat{X}^2 \\ \hat{X}^1 - i\hat{X}^2 & -\hat{X}^3 + \hat{X}^4 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} X^3 + X^4 & X^1 + iX^2 \\ X^1 - iX^2 & -X^3 + X^4 \end{bmatrix} A^*. \quad (6.17)$$

Comparando (6.17) e (6.4), e tendo em conta a definição de  $\Lambda_A$ , segue-se que

$$\hat{X} = \Lambda_A X,$$

e portanto, a igualdade (6.15) fica estabelecida.  $\square$

**Corolário 9.** *O grupo de Lorentz  $\mathcal{L}$  é isomorfo ao grupo de Möbius.*

*Demonstração.* Com efeito, pelo Teorema 12 temos que o grupo de Möbius é isomorfo a  $SL(2, \mathbb{C})/\{\pm I\}$ . Como o homomorfismo (6.17) é sobrejectivo, cujo núcleo é  $\{\pm I\}$ , segue-se que  $\mathcal{L} \simeq SL(2, \mathbb{C})/\{\pm I\}$ , como queríamos demonstrar.  $\square$

**Nota 24.** *Como a transformação spinor é sobrejectiva, cada elemento de  $\mathcal{L}$  é igual a  $\Lambda_A$  para algum  $A \in SL(2, \mathbb{C})$  e assim, cada elemento de  $\mathcal{L}$  determina uma transformação de Möbius em  $S^-$  que tem o mesmo efeito nas direcções nulas passado ( $\pm A$  dá origem à mesma transformação de Möbius). Por outro lado, como os vectores nulos passado geram  $\mathcal{M}$ , uma transformação de Lorentz fica unicamente determinada pela sua acção nas direcções nulas passado.*

Uma das consequências da correspondência entre os elementos de  $\mathcal{L}$  e as transformações de Möbius em  $S^-$  é dada pelo teorema a seguir, cuja demonstração segue imediatamente do facto, de que qualquer transformação de Möbius na esfera de Riemann, se não é identidade, possui no máximo dois pontos fixos.

**Teorema 30.** *Se uma transformação de Lorentz própria e ortocrónica não é identidade, então deixa invariante pelo menos uma e no máximo duas direcções nulas passado.*

Outra propriedade bem conhecida de uma dada transformação de Möbius é que ela fica unicamente determinada pela sua acção em três quaisquer pontos distintos no plano complexo ampliado. Consequentemente:

**Teorema 31.** *Uma transformação de Lorentz própria e ortocrónica fica unicamente determinada pela sua acção em três quaisquer direcções nulas passado distintas. Mais precisamente, dados dois conjuntos de três direcções nulas passado distintas, existe um, e somente um, elemento de  $\mathcal{L}$  que leva o primeiro conjunto no segundo conjunto.*

## Comentários Finais

O objectivo desta dissertação foi analisar o modo como as transformações de Möbius estão relacionadas com as transformações de Lorentz (portanto com a teoria da relatividade restrita), usando a abordagem feita em [11] e [15].

Vimos que a teoria da relatividade foi estabelecida pelo físico alemão Hendrik Lorentz no final do século XIX, mas o avanço definitivo foi feito por Albert Einstein em 1905 no seu famoso artigo, que revolucionou o estudo de como os objectos se movem, reduzindo a teoria clássica de Newton, uma magnífica conquista, a um caso particular.

Na teoria da relatividade restrita, as três coordenadas espaciais de um evento  $(x, y, z)$  fundem-se com a coordenada temporal no designado cronótopo de Minkowski,  $(x, y, z, t)$  quadridimensional chamado espaço-tempo.

Na teoria da relatividade de Galileu atribuía-se ao tempo um carácter absoluto. No entanto, a teoria relativista de Einstein, confirmada por várias experiências, afirma que o tempo não é absoluto. Com efeito, se dois observadores, se encontram em movimento relativo, não concordarão em relação ao tempo em que os eventos ocorrem. Mais ainda: também não concordarão sobre o valor de  $x^2 + y^2 + z^2$  e, isso tem a ver com a famosa contracção de Lorentz. Contudo dois observadores,  $\mathcal{O}$  e  $\mathcal{O}'$ , concordarão sobre o valor de

$$x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - t'^2.$$

A transformação de Lorentz é uma transformação linear do espaço-tempo, representado por uma matriz de ordem 4, que aplica a descrição de um evento por um observador,  $(x, y, z, t)$ , noutra descrição do mesmo evento por outro observador,  $(x', y', z', t')$ . A conclusão que tiramos, é que as transformações de Lorentz preservam a quantidade  $x^2 + y^2 + z^2 - t^2$ , sobre a qual ambos os observadores deverão concordar.

Escolhendo um sistema de unidades no espaço-tempo de tal modo que  $c = 1$  obtemos que, após uma unidade de tempo, a esfera de luz emitida, constituída de partículas chamadas fótons é uma esfera unitária. Logo cada fóton  $\hat{z}$  pode ser identificado com um ponto da esfera de Riemann, e através da projecção estereográfica, com um número complexo. Assim se o fóton tem coordenadas polares  $(\theta, \phi)$ , então o correspondente número complexo é

$$z = \cot(\theta/2) e^{i\phi}.$$

Desse modo, cada transformação de Lorentz do espaço-tempo induz uma função no plano complexo. Vimos portanto, que as funções complexas que correspondem a transformações de Lorentz são transformações de Möbius. Vale também a recíproca, toda transformação de Möbius induz uma única transformação de Lorentz do espaço-tempo.

Esta relação profunda significa que cada resultado sobre transformações de Möbius tem um correspondente resultado na teoria da relatividade restrita. Mais: as demonstrações usando transformações de Möbius, segundo Bebiano [3], são menos intrincadas do que as realizadas com o formalismo usual e o jargão do espaço-tempo.

# Bibliografia

- [1] Anadijiban, D. (2012). *The Special Theory of Relativity: A mathematical exposition*. Springer Science & Bussiness Media.
- [2] Araujo, P. V. (1998). *Geometria Diferencial*. Impa.
- [3] Bebiano, N. (2009). *Análise Complexa*. Gradiva.
- [4] Einstein, A. (1905). Zur elektrodynamik bewegter köper. *Annalen der Physik.*, 322(10):891–921.
- [5] Fernandes, R. L. and Riccou, M. (2014). *Introdução à Álgebra, 2ª ed.* IST press.
- [6] Gel'fand, I. M. and Minlos, R. A. (2018). *Representations of the Rotation and Lorentz Groups and their Applications*. Courier Dover Publications.
- [7] Gonzalez, M. (1991). *Classical Complex Analysis*. CRC press.
- [8] Howell, R. W. and Matheus, J. H. (2006). *Complex Analysis for Mathematics and Engineering*. jones & Bartlett publ.
- [9] Jones, G. A. and Singermann, D. (1987). *Complex Functions: an algebraic and geometric viewpoint*. Cambreidge university press.
- [10] Marsden, J. E. and Hoffman, M. J. (1999). *Basic Complex Analysis, 3ª ed.* Freemann.
- [11] Nabor, G. L. (2012). *The Geometry of Minkowski Spacetime: An Introduction to the mathematics of Special Theory of Relativity*. Springer Science & Bussiness Media.
- [12] Needham, T. (1998). *Visual Complex Analysis*. Oxford university press.
- [13] Olsen, J. (2010). *The Geometry of Möbius Transformations*. Rochester: University of Rochester.
- [14] Ougarov, V. (1979). *Théorie de la Relativité Restreinte, 10ª ed.* Mir Moscow.
- [15] Penrose, R. and Rindler, W. (1984). *Spinors and Space-Time: Two spinors calculus and relativistic filds, Volume 1*. Cambrigde university press.

- [16] Rozenfel'd, B. A. and Sergeeva, N. D. (1977). *Stereographic Projection*. Mir publishers.
- [17] Schwerdtfeger, H. (1979). *Geometry of Complex Numbers: Circle geometry, Moebius transformations, Non-Euclidean geometry*. Courier Corporation.
- [18] Zeeman, E. C. (1964). Causality implies the lorentz group. *Mathematical Physics.*, 5(4):490–493.