



**UNIVERSIDADE DE CABO VERDE**  
FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
MESTRADO em MATEMÁTICA E APLICAÇÕES

# Estratégias Dinâmicas de Aprendizagem em Matemática no Domínio da Trigonometria

*José Manuel Fernandes Moreira*

Orientadores: Paula Oliveira | Dina Seabra

Com o apoio da Fundação Calouste Gulbenkian



Praia, Dezembro de 2021





**UNIVERSIDADE DE CABO VERDE**  
FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
MESTRADO em MATEMÁTICA E APLICAÇÕES

# **Estratégias Dinâmicas de Aprendizagem em Matemática no Domínio da Trigonometria**

***José Manuel Fernandes Moreira***

Orientadores: Paula Oliveira | Dina Seabra

Praia, Dezembro de 2021



*It is not the knowlegde, but the act of learning,  
not the possession but the act of getting there,  
which grants the greatest enjoyment.*  
Carl Friedric Gauss



**Dedicatória**

Dedico este trabalho aos meus pais, ao meu filho Diogo e a todos meus familiares e amigos que me ajudaram nesta trajetória



**O júri :**

**Presidente** Professora Doutora Telma Silva da Universidade de Cabo Verde

**Arguente** Professora Doutora Astrigilda Silveira da Universidade de Cabo Verde

**Orientadoras** Professoras Doutoradas *Paula Oliveira e Dina Seabra* da Universidade de Aveiro, Portugal



## **Agradecimentos**

Às orientadoras Dra. Paula Oliveira e Dra. Dina Seabra, que me orientaram desde o início e sempre disponíveis a ouvir as minhas propostas e dando sugestões quando necessárias.

À Universidade de Cabo Verde (UNICV) e Fundação Calouste Gulbenkian pela oportunidade.

À direção da Escola Secundária Cónego Jacinto (ESCJ), onde eu leciono, aos meus colegas de trabalho que colaboraram e acreditaram neste projeto e em especial aos alunos das turmas  $CT2_1$  e  $CT2_2$  do 11º ano do Ensino Secundário pela colaboração e participação ativa na experiência realizada.

Aos professores do curso de mestrado, pelos ensinamentos e partilhas do conhecimento.

Aos meus colegas de mestrado, pelo força e determinação em alguns momentos difíceis, principalmente Danta Vaz que com o seu companheirismo e determinação me incentivaram durante todo o processo.

À minha família, amigos e principalmente o meu filho, que me apoiaram e entenderam as minhas escolhas.



**Resumo**

Este trabalho apresenta uma proposta de implementação de estratégias dinâmicas de aprendizagem envolvendo metodologias ativas no tópico Trigonometria no Ensino Secundário, com suporte do software GeoGebra. A pesquisa envolve duas turmas do 11º Ano de Escolaridade do Ensino Secundário da área ciências e tecnologias, abordando trigonometria num processo de ensino e aprendizagem significativa, participativo, construtivo e interativo, incentivando o envolvimento dos alunos com uma atividade concreta, contextualizada e com o auxílio do programa computacional GeoGebra. Os resultados encontrados apontam para a necessidade de se trabalhar com o conteúdo de trigonometria de forma mais contextualizada de modo que possa atribuir mais significado ao seu estudo. Aplicaram-se atividades a grupos de três elementos para duas turmas do 11º Ano de Escolaridade. A escolha destas atividades foi baseada na importância do ensino da trigonometria para o Ensino Secundário, de modo a facilitar a compreensão do conteúdo.

**Palavras-chave:**

Aprendizagem Significativa; Metodologias Ativas; Estratégias Dinâmicas; Trigonometria; GeoGebra.



**Abstract**

This work presents a proposal for the implementation of dynamic learning strategies involving active methodologies in the topic Trigonometry in Secondary Education, supported by GeoGebra software. The research involves two classes from the 11th grade of Secondary Education in the area of science and technology, approaching trigonometry in a meaningful, participatory, constructive and interactive teaching and learning process, encouraging student involvement with a concrete, contextualized activity and with the help of GeoGebra computer program. The results found point to the need to work with the content of trigonometry in a more contextualized way so that it can give more meaning to its study. Activities were applied to groups of three elements for two classes of the 11th grade of Schooling. The choice of these activities was based on the importance of trigonometry teaching for Secondary Education, in order to facilitate the understanding of the content.

**Keywords:**

Meaningful Learning; Active Methodologies; Dynamic Strategies; Trigonometry; GeoGebra.



# Conteúdo

<b>Lista de Figuras</b>	<b>iv</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>viii</b>
<b>Lista de Símbolos e Abreviaturas</b>	<b>x</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>2</b>
<b>2 Fundamentação Teórica</b>	<b>6</b>
2.1 Aprendizagem significativa . . . . .	6
2.2 Aprendizagem ativa . . . . .	7
2.3 Aprendizagem Baseada em Problemas (PBL - Problem Based Learning) . .	11
2.3.1 Papel do professor . . . . .	12
2.3.2 Papel dos alunos . . . . .	13
2.4 Aprendizagem Baseada em Equipas (TBL - Team Based Learning ) . . . .	13
2.5 GeoGebra . . . . .	16
<b>3 Conceitos Trigonométricos</b>	<b>18</b>
3.1 Razões trigonométricas no triângulo retângulo . . . . .	19
3.2 Razões trigonométricas num triângulo qualquer . . . . .	21
3.3 Arcos e ângulos . . . . .	28
3.4 Círculo trigonométrico . . . . .	31
3.4.1 Razões trigonométricas no círculo trigonométrico . . . . .	32
3.4.2 Redução ao 1º quadrante . . . . .	34
3.5 Funções trigonométricas . . . . .	35
3.5.1 Função seno . . . . .	36
3.5.2 Função cosseno . . . . .	37
3.5.3 Função tangente . . . . .	38
3.5.4 Função cotangente . . . . .	40
3.6 Equações trigonométricas . . . . .	41
<b>4 Realização das Atividades, Análise e Discussão dos Resultados</b>	<b>44</b>
4.1 Estratégias metodológicas . . . . .	44
4.2 Caracterização da escola e das turmas . . . . .	45

---

4.3	Planificação geral das atividades letivas	46
4.4	Atividade 1	47
4.4.1	Análise da aplicação da atividade 1	47
4.4.2	Conclusão da atividade 1	49
4.5	Atividade 2	49
4.5.1	Análise da aplicação da atividade 2	50
4.5.2	Conclusão da atividade 2	53
4.6	Atividade 3	53
4.6.1	Análise da aplicação da atividade 3	54
4.6.2	Conclusão da atividade 3	62
4.7	Atividade 4	62
4.7.1	Conclusão da atividade 4	69
4.8	Perceção dos alunos sobre as atividades realizadas	70
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>72</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>74</b>
<b>A</b>	<b>Apêndices</b>	<b>80</b>
A.1	Atividade 1	80
A.2	Atividade 2	81
A.3	Atividade 3	82
A.4	Atividade 4	83
A.5	Questionário aos alunos	84

# Lista de Figuras

2.1	Pirâmide da aprendizagem de William Glasser . . . . .	8
2.2	Modelo de funcionamento do TBL . . . . .	14
3.1	Triângulo retângulo . . . . .	19
3.2	Triângulos retângulos . . . . .	20
3.3	Triângulo retângulo . . . . .	20
3.4	Triângulo qualquer . . . . .	21
3.5	Triângulo retângulo . . . . .	22
3.6	Triângulo Acutângulo . . . . .	22
3.7	Triângulo Acutângulo . . . . .	23
3.8	Suporte GeoGebra . . . . .	24
3.9	Triângulo qualquer . . . . .	25
3.10	Triângulo retângulo . . . . .	25
3.11	Triângulo Acutângulo . . . . .	26
3.12	Triângulo obtusângulo . . . . .	27
3.13	Triângulo acutângulo, retângulo e obtusângulo . . . . .	28
3.14	Suporte GeoGebra . . . . .	28
3.15	Arcos e ângulos na circunferência . . . . .	29
3.16	Ângulo orientado . . . . .	29
3.17	Medir ângulos/GeoGebra . . . . .	30
3.18	Círculo trigonométrico . . . . .	31
3.19	Quadrantes/GeoGebra . . . . .	32
3.20	Razões trigonométricos . . . . .	32
3.21	Sinais das razões trigonométricas/GeoGebra . . . . .	33
3.22	2° quadrante/GeoGebra . . . . .	34
3.23	3° quadrante/GeoGebra . . . . .	35
3.24	4° quadrante/GeoGebra . . . . .	35
3.25	Gráfico da função $f(x) = \sin x$ para $x \in [0, 2\pi]$ . . . . .	36
3.26	Gráfico $\sin x$ /GeoGebra . . . . .	36
3.27	Gráfico da função $f(x) = \cos x$ para $x \in [0, 2\pi]$ . . . . .	37
3.28	Gráfico $\cos x$ /GeoGebra . . . . .	38
3.29	Gráfico da função $f(x) = \tan x$ para $x \in [0, 2\pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$ . . . . .	38
3.30	Gráfico $\tan x$ /GeoGebra . . . . .	39

---

3.31	Gráfico da função $f(x) = \cot x$ para $x \in ]0, 2\pi[ \setminus \{\pi\}$ . . . . .	40
3.32	Gráfico de $\cot x$ /GeoGebra . . . . .	40
3.33	Senô/GeoGebra . . . . .	42
3.34	Cosseno/GeoGebra . . . . .	42
3.35	Tangente/GeoGebra . . . . .	43
3.36	Tangente/GeoGebra . . . . .	43
4.1	Quadro da sala de aula . . . . .	47
4.2	Recolha de dados da atividade 1 . . . . .	47
4.3	Resolução e execução da atividade 1 . . . . .	48
4.4	Resoluções alínea a da atividade 1 pelos grupos 1 e 2 . . . . .	48
4.5	Resoluções da alínea b da atividade 1 pelos grupos 1 e 2 . . . . .	49
4.6	Chão da sala de aula . . . . .	50
4.7	Recolha de dados da atividade 2 . . . . .	50
4.8	Resoluções da alínea a da atividade 2 pelos grupos 1 e 3 . . . . .	51
4.9	Resoluções da alínea b da atividade 2 pelos grupos 1 e 3 . . . . .	52
4.10	Resoluções da alínea c da atividade 2 pelos grupos 1 e 3 . . . . .	52
4.11	Roda gigante . . . . .	54
4.12	Resolução e execução da atividade 3 . . . . .	54
4.13	Resoluções da alínea a da atividade 3 pelos grupos 2 e 4 . . . . .	55
4.14	Resoluções da alínea b da atividade 3 pelos grupos 2 e 4 . . . . .	55
4.15	Resoluções da alínea c da atividade 3 pelos grupos 2 e 4 . . . . .	56
4.16	Resoluções da alínea d da atividade 3 pelos grupos 3 e 4 . . . . .	56
4.17	Alteração de valor do parâmetro <b>a</b> da atividade 3 pelo grupo 3 . . . . .	57
4.18	Análise sobre parâmetro <b>a</b> da atividade 3 pelo grupo 3 . . . . .	57
4.19	Alteração de valor do parâmetro <b>a</b> da atividade 3 pelo grupo 4 . . . . .	58
4.20	Análise sobre parâmetro <b>a</b> da atividade 3 pelo grupo 3 . . . . .	58
4.21	Alteração de valor do parâmetro <b>b</b> da atividade 3 pelo grupo 3 . . . . .	59
4.22	Análise sobre parâmetro <b>b</b> da atividade 3 pelo grupo 3 . . . . .	59
4.23	Alteração de valor do parâmetro <b>b</b> da atividade 3 pelo grupo 4 . . . . .	60
4.24	Análise sobre parâmetro <b>b</b> da atividade 3 pelo grupo 4 . . . . .	60
4.25	Alteração de valor do parâmetro <b>c</b> da atividade 3 pelo grupo 3 . . . . .	61
4.26	Análise do parâmetro <b>c</b> da atividade 3 pelo grupo 3 . . . . .	61
4.27	Análise do parâmetro <b>c</b> da atividade 3 pelo grupo 4 . . . . .	61
4.28	Maré no mar da prainha . . . . .	63
4.29	Realização da atividade 4 . . . . .	63
4.30	Resoluções da alínea b da atividade 4 pelos grupos 1 e 5 . . . . .	64
4.31	Resolução da alínea c da atividade 4 pelo grupo 1 . . . . .	65
4.32	Resolução da alínea c da atividade 4 pelo grupo 5 . . . . .	66
4.33	Resoluções da alínea d da atividade 4 pelos grupos 1 e 5 . . . . .	66
4.34	Resoluções da alínea e da atividade 4 pelos grupos 1 e 5 . . . . .	67
4.35	Função inicial . . . . .	67
4.36	Alteração de valor do parâmetro <b>a</b> da atividade 4 . . . . .	68

---

4.37	Alteração de valor do parâmetro <b>b</b> da atividade 4 . . . . .	68
4.38	Alteração de valor do parâmetro <b>c</b> da atividade 4 . . . . .	69
4.39	Alteração de valor do parâmetro <b>c</b> da atividade 4 . . . . .	69
4.40	Opinião dos alunos sobre as atividades realizadas . . . . .	70
4.41	Opinião dos alunos sobre o nível de dificuldade das atividades . . . . .	71
A.1	Quadro da sala de aula . . . . .	80
A.2	Solo da sala de aula . . . . .	81
A.3	Roda gigante . . . . .	82
A.4	Maré no mar da prainha . . . . .	83



# Lista de Tabelas

3.1 Razões trigonométricas . . . . .	33
4.1 Plano de atividades letivas . . . . .	46



# Lista de Símbolos e Abreviaturas

MS	Mestrado em Matemática
LC	Licenciatura em Matemática
FCT	Faculdade de ciências e tecnologias
Uni-CV	Universidade de Cabo Verde
DISS	Dissertação
CdM-CV	Campos da Matemática Gulbenkian em Cabo Verde
$\overline{AB}$	Medida do comprimento do segmento $[AB]$
$\widehat{AB}$	Amplitude do arco AB
$A\hat{O}B$	Amplitude do ângulo AOB



# Capítulo 1

## Introdução

A Matemática é das disciplinas com maior dificuldade de compreensão por parte dos alunos no Ensino Secundário em Cabo Verde. Deste modo, é fundamental desenvolver novas estratégias de aprendizagem dos conteúdos de forma a facilitar a compreensão dos conceitos.

Para realizar este trabalho foi necessário, inicialmente, fazer um levantamento bibliográfico, que consistiu na leitura de livros e artigos científicos. Em seguida, foi feita uma investigação sobre as aplicabilidades da trigonometria, visualizando as suas aplicações desde as mais simples às mais complexas. Os problemas escolhidos foram adaptados à nossa realidade e vivência cotidiana, analisando como trabalhá-los e adequando-os à realidade da sala de aula.

Para a realização da pesquisa escolhemos duas turmas de 11º Ano, área de Ciências e Tecnologias. Uma turma era composta por 9 alunos e a outra turma composta por 14 alunos. A idade dos alunos varia entre 16 e os 17 anos e todos eles estão a frequentar o 11º Ano pela primeira vez. A estratégia metodológica adotada nesse trabalho contou com uma pesquisa essencialmente de vertente qualitativa. Segundo [Bogdan and Biklen \(1994\)](#), a pesquisa qualitativa sistematiza cinco características básicas constitutivas dos estudos de tipo qualitativo.

A primeira delas destaca o ambiente natural como base dos dados investigados, do que resulta o grande valor conferido ao contato direto, e preferencialmente prolongado, do pesquisador com o campo de estudo. Neste sentido, a pessoa do pesquisador é considerada importante instrumento para a observação, seleção, análise e interpretação dos dados coletados e em face desta tarefa, poderá utilizar recursos tais como filmagens, fotografias, gravações, documentos históricos, registos escritos como objetivo de ampliar a confiabilidade de suas percepções.

A segunda característica refere-se ao caráter fundamentalmente descritivo destas investigações. Afirmando a necessidade de apreensão dos dados nas relações que eles mantêm com o contexto ao qual pertencem, procura-se verificar como os fenómenos se manifestam, tendo em vista uma compreensão holística, histórica e processual.

A terceira característica considera a pesquisa de tipo qualitativo como essencialmente

voltada para o processo, ou seja, o objetivo da investigação assenta nas descrições dos problemas estudados tal como manifestos nas atividades, nos procedimentos e nas interações cotidianas.

A quarta característica afirma que do ponto de vista metodológico, os modelos qualitativos defendem que a melhor maneira para se captar a realidade é aquela que possibilita ao pesquisador colocar-se no lugar do outro, apreendendo os fenómenos pela visão dos pesquisadores. A preocupação essencial da investigação refere-se aos significados que as pessoas atribuem aos fenómenos.

A quinta, e última, característica geral proposta por estudiosos da metodologia qualitativa diz respeito à natureza indutiva destas investigações. Assim, o processo investigativo não parte de hipóteses definidas a priori (a serem comprovadas ou refutadas pelas evidências encontradas) nem de uma linha teórica pré-determinada.

Na segunda etapa empregou-se a vertente quantitativa, que tem ênfase na objetividade e os resultados são quantificados. Adotou-se uma pesquisa conclusiva para avaliar a percepção dos alunos a respeito da metodologias ativas PBL e TBL no processo de ensino e aprendizagem. O estudo foi complementado com a utilização do software GeoGebra.

A aprendizagem significativa representa a capacidade dos alunos de internalizar ideias abstratas de modo a que o seu aprendizado seja promovido para além dos requisitos do curso e, por outro lado habilidades úteis possam ser adquiridas e aplicadas a situações do mundo real (Hsieh (2013)). Infelizmente, a aprendizagem significativa não é facilmente alcançada com os métodos tradicionais de aula (Smith et al. (2005)).

Segundo a teoria da aprendizagem significativa (Ausubel (1980)) há uma distinção no que se refere à aprendizagem por descoberta, na qual o conteúdo que deve ser aprendido é descoberto pelo aprendiz, e a aprendizagem por recepção, na qual o que deve ser aprendido é apresentado ao aprendiz na sua forma final. Qualquer que seja o método de aprendizagem, seja por descoberta ou por recepção, nenhuma aprendizagem significativa ocorre se não houver a incorporação da nova informação de forma não arbitrária à estrutura cognitiva do estudante.

A utilização de metodologias ativas em sala de aula pode ser uma das formas de promover uma aprendizagem significativa dos alunos. Aprender não é um desporto para espectadores, os alunos não aprendem muito apenas sentados em sala de aula ouvindo os professores, memorizando tarefas pré-definidas e disparando respostas. Eles devem falar sobre o que estão aprendendo, escrever sobre isso, relacionar com experiências passadas, aplicar em suas vidas diárias. Os estudantes devem apoderar-se do conhecimento (Chickering and Gamson (1987)).

Da minha experiência de lecionar no Ensino Secundário, tenho vindo a constatar a dificuldade dos alunos em compreender a abordagem do conteúdo Trigonometria. Em Cabo Verde, o atual programa de matemática do Ensino Secundário faz referência à resolução de problemas. Pretende-se que os alunos desenvolvam a capacidade de resolver problemas, em situações de maior complexidade e que convocam a mobilização das novas aprendizagens nos diversos domínios, aprofundando a análise de estratégias e dos resultados obtidos, e formulando problemas em contextos variados. Este programa aconselha ainda a utilização de Ambientes Dinâmicos de Geometria Dinâmica (ADGD) ou a outros softwares para ati-

vidades de exploração ou investigação de conteúdos matemáticos. Contudo, existem vários softwares dinâmicas para o ensino da matemática, como por exemplo: GRAPHMATICA<sup>1</sup>, WINPLOT<sup>2</sup>, WinGeom, Poly<sup>3</sup>, EQUATION GRAPHER<sup>4</sup>, GSP<sup>5</sup>, Cabri-Géomètre<sup>6</sup> que são facilitadores da compreensão de muitos conceitos matemáticos. Neste trabalho optei pelo GeoGebra pelo fato de ser um software open source, com inúmeras ferramentas e que dispõe de uma versão mobile. O GeoGebra vem ao encontro de novas estratégias de ensino e aprendizagem de conteúdos de geometria, álgebra, cálculo e estatística, permitindo a professores e alunos a possibilidade de explorar, conjecturar e investigar, permitindo alicerçar a construção do conhecimento matemático.

Nas aulas sobre este tópico, os alunos foram incentivados a conjecturar e testar as suas hipóteses recorrendo ao GeoGebra

O projeto surgiu a partir da necessidade de combater o desinteresse dos alunos em relação à matemática no Ensino Secundário em Cabo Verde (e em relação às outras disciplinas, pelos comentários de meus colegas professores). Deste modo, decidimos introduzir estratégias dinâmicas de aprendizagens ativa no domínio da trigonometria, para tentar motivar os alunos para um tópico tão relevante como este.

O objetivo deste trabalho é desenvolver experiências de aprendizagem significativa envolvendo metodologias ativas e estratégias dinâmicas em tópicos de trigonometria no Ensino Secundário, de modo a promover a retenção de informação ao longo do tempo, reforçar a motivação dos estudantes para aprender mais, fortalecer a aplicação da informação recebida noutros contextos, potenciar o desenvolvimento de capacidades de raciocínio, desenvolver, através de recursos computacionais, um objeto de aprendizagem para o ensino de conceitos trigonométricos e avaliar a contribuição de um objeto de aprendizagem para ensino e aprendizagem de trigonometria à luz da teoria da aprendizagem significativa.

No contexto cabo-verdiano, existem alguns estudos realizados sobre a temática Dinâmicas de Aprendizagem Significativa em Matemática, envolvendo metodologias ativas e estratégias didáticas com suporte do software GeoGebra, nomeadamente, "O GeoGebra na formação e aprendizagem de Transformações Geométricas Isométricas no plano euclidiano"(Silveira (2015)), "O GeoGebra como ferramenta de apoio para aprendizagem significativa da Geometria"(Silveira and Cabrita (2018)), "Formação de formadores em GeoGebra

---

<sup>1</sup>GRAPHMATICA-Desenha gráficos de funções. Visualiza o gráfico de várias funções simultaneamente. Calcula o valor da função para um determinado elemento de seu domínio. Excelente para quem está estudando funções.

<sup>2</sup>WINPLOT-Software que permite que se construa gráficos a partir de funções elementares. Possibilita que se construa gráficos em duas e três dimensões e ainda que se trabalhe com operações de funções.

<sup>3</sup>Poly-Software que permite a investigação de sólidos tridimensionalmente (com possibilidade de movimento), dimensionalmente (planificação) e de vista topológica. Possui uma grande coleção de sólidos, platónicos e arquimedianos entre outros

<sup>4</sup>EQUATION GRAPHER-Desenha o gráfico de funções matemáticas.

<sup>5</sup>GSP é especialmente adequado e útil quando os alunos se envolvem em actividades de investigação e exploração. Ao permitir um grande número de experiências num curto espaço de tempo favorece a formulação de conjecturas

<sup>6</sup>Cabri-Géomètre-Software de construção que nos permite usar régua e compasso digitais. Os desenhos de objetos geométricos são feitos a partir das propriedades que os definem.

para Cabo Verde, 2016-2017 - Tarefas e resultados”(Dos Santos (2020)), ”Estudo da Trigonometria no 11<sup>o</sup> Ano Com Recurso ao Software GeoGebra”(Brito, Da Luz and Duarte (2018)) e ”Uma abordagem do estudo da derivada de uma função com aplicação do GeoGebra”(Neves (2019)). Contudo, no contexto internacional existem imensas referências sobre esta temática, como por exemplo: Marjúnia Édita Zimmer Klein (Klein (2015)), Felipe Almeida Costa (Almeida Costa and Allevato (2019)), A. Kartikasari e D.B. Widjajanti (Kartikasari (2017)) e outros trabalhos realizados (Mathias (2019), Pereira and Guerra (2016), Bordin (2019), Costa (2017), Fonseca et al. (2011), Silva (2019), Feijó (2018)).

O trabalho encontra-se estruturado da seguinte forma:

No Capítulo 1, temos a introdução do tema.

No Capítulo 2, apresentamos fundamentação teórica em relação a: aprendizagem significativa, aprendizagens ativas, aprendizagem baseada em problemas, aprendizagem baseada em equipas e o uso do GeoGebra.

No Capítulo 3, retratamos os conceitos trigonométricos abordados no Ensino Secundário. Para este capítulo analisamos 3 livros didáticos Neves (1995), Iezzi et al. (1995) e Neves et al. (2006). O conteúdo é apresentado por uma produção nova das definições após análise dos livros didáticos, seguindo as orientações curriculares para o Ensino Secundário em Cabo Verde.

No Capítulo 4, descrevemos a experiência implementada, relatamos os resultados obtidos das atividades realizadas bem como a sua análise e discussão e apresentamos o resultado do questionário aplicado.

Por fim, no Capítulo 5, fazemos as considerações finais da investigação.

## Fundamentação Teórica

### 2.1 Aprendizagem significativa

A aprendizagem significativa é um processo no qual uma nova informação relaciona-se de forma não arbitrária e substantiva com algum aspecto especificamente relevante da estrutura de conhecimento do indivíduo, ou seja, há uma interação do novo conhecimento com o já existente ([Moreira \(1999\)](#)).

A teoria da aprendizagem significativa tem como conceitos básicos o próprio conceito de aprendizagem significativa e o conceito de estrutura cognitiva. A ocorrência da aprendizagem significativa depende em boa parte de como a estrutura cognitiva está organizada e esta só se desenvolve por meio de aprendizagens significativas ([Neto \(2006\)](#)).

A essência do processo de aprendizagem significativa é que as ideias expressas simbolicamente são relacionadas às informações previamente adquiridas pelo aluno através de uma relação não arbitrária e substantiva (não literal). Uma relação não arbitrária e substantiva significa que as ideias estão relacionadas com algum aspecto relevante existente na estrutura cognitiva do aluno, como por exemplo, uma imagem, um símbolo, um conceito ou uma proposição ([Ausubel \(1982\)](#)).

Segundo [Moreira \(2012\)](#), na aprendizagem significativa o novo conhecimento nunca é internalizado de maneira literal, porque no momento em que passa a ter significado para o aprendiz entra em cena a componente idiossincrática da significação. Aprender significativamente implica atribuir significados ao que se está a aprender e estes têm sempre componentes pessoais. Aprendizagem sem atribuição de significados pessoais, sem relação com o conhecimento preexistente, é mecânica, não significativa. Na aprendizagem mecânica, o novo conhecimento é armazenado de maneira arbitrária e literal na mente do indivíduo. O que não significa que esse conhecimento seja armazenado em um vácuo cognitivo, mas sim que ele não interage significativamente com a estrutura cognitiva preexistente, não adquire significados. Durante um certo período de tempo, a pessoa é inclusive capaz de reproduzir o que foi aprendido mecanicamente, mas não significa nada para ela.

De acordo com [Ausubel \(1982\)](#), para que haja aprendizagem significativa é necessário ter duas condições:

1. O material de aprendizagem tem que ser potencialmente significativo, isto é, o material precisa ter significado lógico, permitindo que o aluno ancore o novo conhecimento ao seu conhecimento prévio e há a necessidade de o aluno ter conhecimentos prévios capazes de se associar ao conteúdo novo apresentado.
2. O aprendiz tem que apresentar predisposição para aprender significativamente, ou seja, esta aprendizagem tem muito mais relação com o aluno do que com o professor, pois só depende de o próprio aluno querer aprender de forma significativa, associando os novos conhecimentos aos seus subsunçores<sup>1</sup>, de forma não literal e não arbitrária.

### Tipos de aprendizagem significativa

Ausubel (1982) distingue três tipos de aprendizagem significativa: representacional, de conceitos e proposicional.

**A aprendizagem representacional** é o tipo mais básico de aprendizagem significativa, do qual os demais dependem. Envolve a atribuição de significados a determinados símbolos (tipicamente palavras), isto é, a identificação, em significado, de símbolos com seus referentes (objetos, eventos, conceitos). Os símbolos passam a significar, para o indivíduo, aquilo que seus referentes significam.

**A aprendizagem de conceitos** é, de certa forma, uma aprendizagem representacional, pois conceitos são também representados por símbolos particulares, porém, são genéricos ou categóricos, representam abstrações dos atributos essenciais dos referentes, isto é, representam regularidades em eventos ou objetos.

**Na aprendizagem proposicional**, contrariamente à aprendizagem representacional, a tarefa não é aprender significativamente o que palavras isoladas ou combinadas representam, mas sim, aprender o significado de ideias em forma de proposição. De um modo geral, as palavras combinadas em uma frase para constituir uma proposição representam conceitos. A tarefa, no entanto, também não é aprender o significado dos conceitos (embora seja pré-requisito), e, sim, o significado das ideias expressas verbalmente por meio desses conceitos sob forma de uma proposição, ou seja, a tarefa é aprender o significado que está além da soma dos significados das palavras ou conceitos que compõem a proposição.

## 2.2 Aprendizagem ativa

Aprendizagem ativa é um conjunto de práticas pedagógicas centradas no aluno de forma que ele aprenda os conhecimentos propostos por meio da interação entre ele e os outros colegas, estimulando o pensamento crítico. Nesse sentido, o grande objetivo das metodologias ativas é fazer com que o aluno passe a ser o personagem principal da relação de ensino e aprendizagem, sendo que o professor continua participando deste processo, mas o faz com outras formas de contribuição (Ezhilarasi et al. (2017)).

---

<sup>1</sup>subsunçores são conceitos, ideias, proposições já existentes na estrutura cognitiva do aprendiz que servem de apoio a um novo conhecimento, permitindo ao indivíduo atribuir-lhe significado.

O psiquiatra americano William Glasser elaborou uma pirâmide da aprendizagem ilustrativa da forma como o ser humano geralmente aprende e a eficiência dos métodos usados no processo de aprendizagem (ver Figura 2.1).



Fig. 2.1: Pirâmide da aprendizagem de William Glasser

Segundo [Limberger \(2013\)](#) existem várias metodologias ativas sendo utilizadas, contudo, para que uma metodologia seja considerada boa estratégia de ensino, deve ser:

- Construtivista: se basear em aprendizagem significativa;
- Colaborativa: favorecer a construção do conhecimento em grupo;
- Interdisciplinar: proporcionar atividades integradas a outras disciplinas;
- Contextualizada: permitir que o educando entenda a aplicação desse conhecimento na realidade;
- Reflexiva: fortalecer os princípios da ética e de valores morais;
- Crítica: estimular o educando a procurar conhecimentos de modo a entender as limitações das informações que chegam até ele;
- Investigativa: despertar a curiosidade e a autonomia, possibilitando ao educando a oportunidade de aprender a aprender;
- Humanista: dá ênfase a relações interpessoais e ao crescimento que delas resulta, centrado no desenvolvimento da personalidade do indivíduo e ao contexto social;

- Motivadora: trabalhar e valorizar a emoção;
- Desafiadora: estimular o estudante a encontrar soluções.

Muitos professores de matemática, da educação básica até o nível superior, estão preocupados em procurar métodos alternativos de ensino, mas abandonar a aula expositiva parece ser uma tarefa muito complicada, pois nem sempre é fácil romper com a lei da inércia, que nos impulsiona a continuar da mesma forma, repetindo modelos pedagógicos centenários (Paiva (2016)).

Uma metodologia ativa consiste em uma ferramenta que insere o aluno em um contexto onde ele é o principal responsável pela aquisição do seu conhecimento. O modelo tradicional de conhecimento transmitido por um professor é deixado de lado, abrindo margem para maior interação dos estudantes com problemas em sua realidade (Watté (2018)).

Aprendizagem ativa é, em suma, qualquer atividade de aprendizagem realizada pelos alunos que não seja ouvir passivamente a palestra de um instrutor (Faust and Paulson (1998)).

Os métodos de aprendizagem ativa mais comuns encontrados na pesquisa científica incluem aprendizagem cooperativa, aprendizagem colaborativa, aprendizagem baseada em problemas, aprendizagem baseada em descoberta / investigação e aprendizagem baseada em desafios (Hsieh (2013)).

Segundo Hsieh (2013) a aprendizagem ativa foi estudada extensivamente em várias disciplinas e o vasto corpo de pesquisas identificou uma variedade de abordagens para aprimorar o ensino e a aprendizagem em sala de aula. No entanto, cada disciplina utiliza terminologia ligeiramente diferente para descrever abordagens pedagógicas semelhantes, intensificando assim a confusão ao determinar qual a estratégia de aprendizagem ativa a implementar.

Aprendizagem ativa é geralmente definida como qualquer método de instrução que envolve os alunos no processo de aprendizagem. Em suma, a aprendizagem ativa requer que os alunos façam atividades de aprendizagem significativas e pensem sobre o que estão fazendo (Bonwell and Eison (1991)). Os alunos que vivenciam a aprendizagem ativa geralmente exibem maior conhecimento, e maior retenção a médio e longo prazo.

Aprender não é um desporto para espectadores; os alunos não aprendem muito apenas sentados em sala de aula ouvindo os professores, memorizando tarefas pré-embaladas e "cuspidando" respostas. Eles devem falar sobre o que estão aprendendo, escrever sobre isso, relacionar com experiências passadas, aplicar em suas vidas diárias. Eles devem apoderar-se do conhecimento (Chickering and Gamson (1987)).

Algumas das principais características associadas às estratégias de aprendizagem ativa, são elencadas abaixo segundo Bonwell and Eison (1991):

- Os alunos estão envolvidos em mais do que apenas ouvir passivamente;
- Os alunos estão envolvidos em atividades (por exemplo, leitura, discussão, escrita);
- Há menos ênfase na transmissão de informações e maior ênfase no desenvolvimento das habilidades dos alunos;

- Há maior ênfase na exploração de atitudes e valores;
- A motivação do aluno aumenta (especialmente para alunos adultos);
- Os alunos recebem feedback imediato de seu instrutor;
- Os alunos estão envolvidos em pensamento de ordem superior (análise, síntese, avaliação).

Também é necessário reconhecer o importante papel do docente na aplicação dessas metodologias. Mesmo sabendo que o aprendiz assume papel central nessa leitura pedagógica, isso não quer dizer que ele é autossuficiente e independente no processo de aprendizagem. A orientação do professor para guiá-los pelos caminhos dos saberes é fundamental. Não precisa mais manter a imagem de ser o detentor de todo o saber, mas sim o guia, o suporte, o orientador que levará o estudante a atingir o seu objetivo de estudo.

A responsabilidade sobre a aprendizagem agora é do estudante, que precisa assumir uma postura mais participativa, na qual resolve problemas, desenvolve projetos e, com isso, cria oportunidades para a construção de seu conhecimento. O professor passa a ter a função de mediador, consultor do aprendiz.

Metodologias ativas têm sido centro de muitos debates educacionais, mas elas só fazem sentido quando são primeiramente internalizadas pelo docente, quebrando o seu próprio paradigma de ensino, para aí sim, ao lado do aprendiz, construir juntos um processo educacional efetivo.

Alguns obstáculos ou barreiras, elencadas por [Bonwell and Eison \(1991\)](#), impedem o corpo docente de usar estratégias ativas de aprendizagem:

- Não pode cobrir tanto conteúdo do curso no tempo disponível;
- Elaborar estratégias de aprendizagem ativa exige muita preparação pré-aula;
- Turmas grandes impedem a implementação de estratégias ativas de aprendizagem;
- A maioria dos instrutores considera-se bons palestrantes;
- Há uma falta de materiais ou equipamentos necessários para apoiar a aprendizagem ativa;
- Os alunos resistem a abordagens que não sejam de aula.

Terminamos esta seção com a frase de [Carotenuto \(2020\)](#) "não existe educação quando não há aprendizagem".

## 2.3 Aprendizagem Baseada em Problemas (PBL - Problem Based Learning)

A Aprendizagem Baseada em Problemas é uma abordagem pedagógica que permite que o estudante aprenda estando ativamente envolvido na resolução de problemas concretos. O método consiste em dar aos estudantes problemas para serem resolvidos de uma forma colaborativa. As discussões entre pares ajudam a consolidar os conhecimentos, a desenvolver um pensamento crítico e hábitos de trabalho.

A Aprendizagem Baseada em Problemas (PBL) tem a sua origem no ensino de Ciências da Saúde da McMaster University, do Canadá, em 1969, sob a coordenação de Howard S. Barrows. Um pouco depois, em 1996, foi adotada na Universidade de Maastricht, Holanda (Camp, Gwendie (1996)). Desde então, foi aplicada em outras Universidades como Southern Illinois School of Medicine (EUA), Harvard Medical School (EUA) e, no Brasil, inicialmente na Faculdade de Medicina de Marília e no Curso de Medicina da Universidade Estadual de Londrina entre os anos de 1997 e 1998 (Strobel and Van Barneveld (2009)).

Segundo Barrows (2002) as componentes-chave do PBL são:

- Problemas mal estruturados são apresentados como não resolvidos para que os alunos gerem não apenas pensamentos múltiplos sobre a causa do problema, mas também pensamentos múltiplos sobre como resolvê-lo;
- Uma abordagem centrada no aluno em que os alunos determinam o que precisam aprender. Cabe aos alunos derivar as questões-chave dos problemas que enfrentam, identificar as suas lacunas de conhecimento, pesquisar e adquirir o conhecimento que falta;
- Os professores atuam como facilitadores e tutores, perguntando aos alunos os tipos de questões metacognitivas que eles desejam que os alunos façam a si mesmos. Nas sessões subsequentes, a orientação desaparece;
- A autenticidade forma a base da seleção do problema, corporificada pelo alinhamento com a prática profissional ou do "mundo real".

Os professores de matemática têm que ensinar os alunos não apenas a resolver problemas, mas também a aprender matemática por meio da resolução de problemas. Embora muitos alunos sejam capazes de desenvolver a sua fluência procedimental, muitas vezes carecem de uma compreensão conceitual profunda, por isso é necessário resolver problemas ou fazer novas conexões entre ideias matemáticas. É um novo desafio para o professor; o PBL dá luta ao professor para enfrentar este desafio. O PBL existe como um método de ensino baseado nos ideais do construtivismo e da aprendizagem centrada no aluno. Ao usar o PBL, os professores ajudam os alunos a se concentrarem na resolução de problemas no contexto da vida real, incentivando-os a considerar a situação em que existe um problema e a tentar encontrar uma solução (Ezhilarasi et al. (2017)).

A aprendizagem baseada em problemas começa com a apresentação de uma situação-problema e a organização dos alunos em grupos de aprendizagem. Os grupos de alunos são então solicitados a projetar e realizar as suas investigações na procura de soluções possíveis. O progresso dos alunos é monitorado pelo professor e pelos próprios alunos à medida que as pesquisas se desenvolvem (Masitoh and Fitriyani (2018)).

Segundo o Modelo de Polya (1995) existem quatro fases para resolver um problema de matemática de forma eficiente. Apresenta-se de seguida uma breve descrição do modelo, tentando demonstrar as características de cada fase e os passos mais importantes:

**1<sup>a</sup>. Compreender o problema**

Nesta fase deve-se certificar que se compreende e identifica a incógnita, os dados e as condições a eles impostas. Deve-se assegurar que todos os aspectos relevantes tenham sido tomados em consideração e devidamente explicitados.

**2<sup>a</sup>. Conceber um plano**

Aqui é necessário formular um plano que permita encontrar uma solução. Deve-se iniciar por pensar de forma análoga, tentando formular um plano por semelhança. Para tal torna-se necessário subdividir o problema em partes, de forma a encontrar sub-problemas mais simples. Por vezes torna-se importante analisar e discutir casos extremos avaliando a sua validade e plausibilidade.

**3<sup>a</sup>. Executar um plano**

É a fase da implementação dos planos formulados de forma a se atingir uma solução, tendo aqui lugar os processos dedutivos.

**4<sup>a</sup>. Análise dos resultados**

Nesta fase verifica-se a solução encontrada, de forma a se proceder à validação da solução. Para tal pode-se avaliar e discutir as implicações de solução encontrada, realizar uma derivação de conclusões ou mesmo tentar resolver o problema por uma segunda via.

Perante um problema concreto, o professor deve orientar os alunos para seguirem os passos aconselhados por Polya.

### **2.3.1 Papel do professor**

Na aprendizagem baseada em problemas, os papéis tradicionais do professor e do aluno mudam. Os alunos assumem uma responsabilidade cada vez maior na sua aprendizagem, dando-lhes mais motivação e mais sentimentos de realização, estabelecendo o padrão para que se tornem alunos bem-sucedidos ao longo da vida. O corpo docente, por sua vez, torna-se recursos, tutores e avaliadores, orientando os alunos nos seus esforços de resolução de problemas (Lopes (2019)).

Os professores assumem o papel de treinador cognitivo e metacognitivo, em vez de detentor do conhecimento, elaboram um problema mal estruturado com base nos resultados

curriculares desejados, nas características do aluno e em situações problemáticas convincentes do mundo real, desenvolvem um esboço ou modelo de eventos de ensino e aprendizagem em antecipação às necessidades de aprendizagem dos alunos, investigam a gama de recursos essenciais para o problema e providenciam a sua disponibilidade, modelam, treinam e atenuam o apoio e a explicitação dos processos de aprendizagem dos alunos (Akçay (2009)).

### 2.3.2 Papel dos alunos

Os alunos assumem o papel de solucionadores ativos de problemas, decisores e criadores de significado, em vez de ouvintes passivos. À medida que os alunos são treinados nos seus papéis de investigadores do mundo real e alunos ativos, eles tornam-se alunos autorregulados, com poderes para investigar as informações necessárias, procurar linhas lógicas de investigação e aprender ativamente.

Os alunos constroem a sua própria compreensão e conhecimento do mundo, experimentando coisas e refletindo sobre essas experiências. Quando eles aprendem algo novo, eles têm que reconciliar com as suas ideias e experiências anteriores, talvez mudando o que eles acreditam, ou talvez descartando as novas informações como irrelevantes. Em qualquer caso, eles são criadores ativos do seu próprio conhecimento. Para fazer isso, eles devem fazer perguntas, explorar e avaliar o que sabem. Eles são responsáveis por toda a sua aprendizagem (Akçay (2009)).

O PBL fornece aos alunos experiência guiada na aprendizagem por meio da resolução de problemas complexos do mundo real.

Na linha da Aprendizagem Baseada em Problemas, a Universidade de Cabo Verde organizou a 1.<sup>a</sup> edição do Campos da Matemática Gulbenkian em Cabo Verde (CdM-CV) entre os dias 19 a 30 de julho de 2021, coordenada pela Professora Doutora Telma Silva.

O objetivos do Campos da Matemática Gulbenkian é proporcionar aos jovens um ambiente privilegiado para descobertas e desafios, que estimulem a sua curiosidade e aumentem a sua motivação para a aprendizagem. No CdM-CV, os estudantes trabalham habilidades e estratégias, através de resolução de problemas, que facilitam a aproximação entre os conteúdos de Matemática estudados e os conhecimentos vivenciados no seu quotidiano e desenvolvem ainda competências nas áreas da concentração, raciocínio lógico-dedutivo, cooperação, organização e autoconfiança (CdM-CV (2021)).

## 2.4 Aprendizagem Baseada em Equipas (TBL - Team Based Learning )

A aprendizagem baseada em equipa (TBL) é uma abordagem colaborativa de ensino e aprendizagem que foi desenvolvida pela primeira vez por Michaelsen (1982) no final dos anos setenta. Michaelsen originalmente projetou a abordagem para lidar com o tamanho cada vez maior das turmas, mas tem sido amplamente usada desde então para estimular o *engajamento* e a negociação entre as equipas de alunos. A abordagem TBL tem sido usada em uma série de áreas e com grupos de tamanhos variados.

Stepanova, Jelena (2018) usou o TBL com um grupo de dez alunos de uma escola de negócios na Letónia e descobriu que essa metodologia era uma ferramenta transformadora para o ensino de ciências da gestão. Cunha (2018) implementou e avaliou uma abordagem de TBL com um grupo de mais de duzentos alunos em uma escola privada de medicina no Brasil e relataram que as percepções dos alunos sobre a experiência se concentram mais na sua interação com os outros do que nos elementos formais da própria TBL.

A aprendizagem baseada em equipas (TBL) é uma metodologia centrada no aluno, com o professor atuando como um facilitador especialista e também oferece aos alunos oportunidades de expor inconsistências entre seus entendimentos atuais e novas experiências, estimulando assim o desenvolvimento de novas estruturas mentais pessoais construídas sobre o conhecimento anterior. A aprendizagem é ativa usando problemas relevantes e interação em grupo. As habilidades de trabalho em equipa são fortalecidas pela reflexão focada em novas experiências durante as sessões de grupo e no sucesso do trabalho em equipa, com feedback imediato por aplicação de instrumentos ou por parte do professor (Hrynchak and Batty (2012)).

A implementação de uma metodologia de aprendizagem baseada em equipas envolve algumas fases começando pela formação dos grupos que se mantêm até o final da disciplina (Oliveira et al. (2018)).

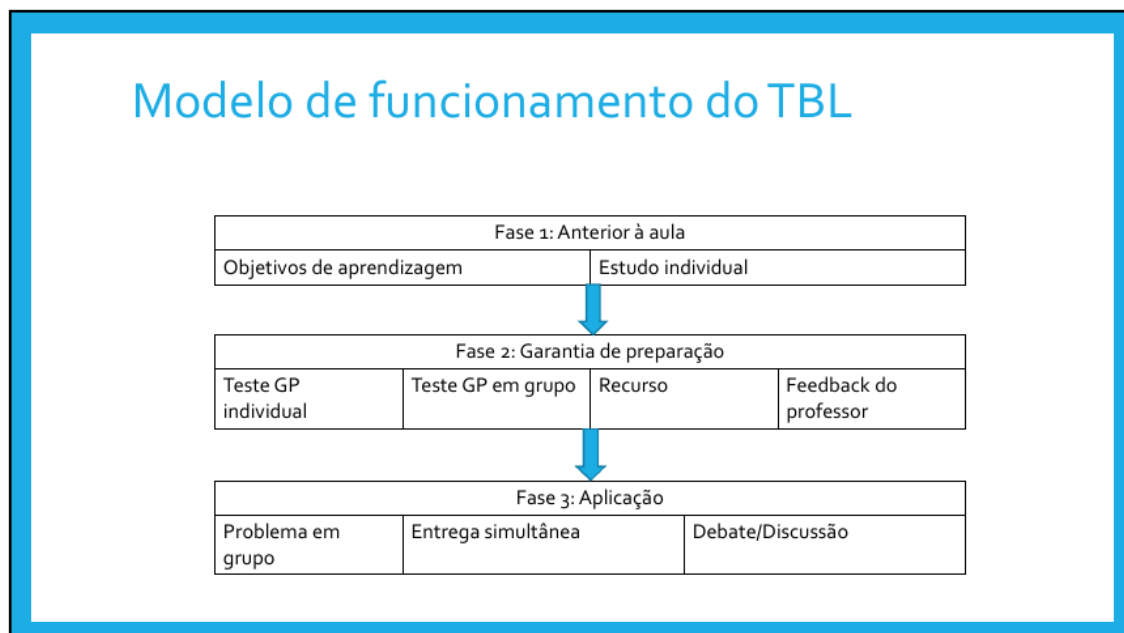


Fig. 2.2: Modelo de funcionamento do TBL

### Fase 1: Anterior à aula

O estudante precisa de estar preparado previamente para a atividade em grupo. Para isso, o conteúdo a ser trabalhado deve ser estudado em casa, através de vídeos, podcasts, filmes ou outros conteúdos. A preparação prévia é uma fase muito importante da aprendizagem baseada em equipas, pois, se os alunos não realizarem as tarefas pré-classe, não

serão capazes de contribuir com o trabalho em equipa.

### **Fase 2: Garantia de preparação**

Essa fase é formada por avaliações individuais e em grupo sobre os assuntos estudados durante a preparação individual. Ela consiste em um teste de 10 a 20 questões de múltipla escolha que deve ser realizada sem consulta. Em um primeiro momento, os alunos serão avaliados individualmente. Assim que o teste for concluído, os alunos podem solicitar uma revisão das questões que o grupo não acertou através de uma apelação (pedido de recurso para rever a questão, defendendo que a sua resposta está correta). Nela, os estudantes podem argumentar qual o motivo para considerarem a sua resposta a correta.

No final dessa fase, o professor reúne todos os grupos para um feedback geral, com comentários sobre cada teste e apelações, abordando os temas mais relevantes.

### **Fase 3: Aplicação**

É o momento onde o professor deve lançar desafios e problemas presentes na vida cotidiana. Nessa fase, que deve ser a mais longa da metodologia de aprendizagem baseada em equipas, o professor conduz as atividades seguindo quatro conceitos básicos a saber: problema significativo; mesmo problema; escolha específica; relatos simultâneos.

A aprendizagem baseada em equipas (TBL) permite que os alunos comparem seus entendimentos atuais com os do grupo e debatam pontos controversos no GRAT (Teste de Avaliação de Prontidão em Grupo) e nos exercícios de aplicação em grupo. Isso é consistente com uma visão construtivista de que a aprendizagem ocorre por meio da integração de informações obtidas por novas experiências em esquemas mentais existentes.

A avaliação GRAT associada à ferramenta que permite que se criem perguntas projetadas para acomodar a colaboração e o consenso do grupo, com um único membro da equipa (líder da equipa) enviando as respostas.

Conforme os alunos se envolvem em uma avaliação GRAT, eles receberão feedback imediato para uma resposta correta ou incorreta. Se a resposta estiver incorreta, os alunos têm a oportunidade de visitar a conversa, discutir por que está incorreta e voltar a se envolver com o conteúdo e os recursos para evidenciar a resposta correta. Depois que uma nova resposta é determinada, o líder da equipa seleciona a nova opção de resposta. Como um método de aprendizagem ativo, a TBL requer que os alunos se envolvam ativamente uns com os outros e com o material na resolução de problemas. Os exercícios de aplicação em grupo são problemas do mundo real que ocorrem nas várias áreas. O pensamento crítico é modelado e aprendido neste processo ativo ([Hrynchak and Batty \(2012\)](#)).

O principal objetivo de aprendizagem na TBL é ir além da simples distribuição de conteúdo e focar em garantir que os alunos tenham a oportunidade de praticar o uso dos conceitos do curso para resolver problemas. O foco principal de uma sala de aula TBL é a aprendizagem do aluno, não o ensino ministrado pelo corpo docente. Embora algum tempo seja gasto para garantir que os alunos dominem o conteúdo do curso, a grande maioria do tempo da aula é usada para tarefas da equipa que se concentram no uso do conteúdo do curso para resolver os tipos de problemas que os alunos provavelmente enfrentarão quando tiverem que aplicar o material do curso na vida real ([Michaelsen \(2014\)](#)).

Michaelson, Larry e Sweet (2008) ainda afirmam que, como resultado desse processo, o professor deve certificar-se de quatro itens essenciais:

- 1º Que os alunos compreendam os motivos pelos quais estão utilizando o TBL e quais serão os benefícios que poderão perceber a longo prazo.
- 2º Que o material de estudo seja de alta qualidade, contemplando itens essenciais do curso e descartando aquilo que não for imprescindível.
- 3º Que os alunos sejam auxiliados no desenvolvimento de habilidades autodidatas e lhes seja fornecido o guia de leituras que os ajudem na sua preparação.
- 4º Que se reitere, ao longo das aulas, que as habilidades conceituais e de interação que eles estão desenvolvendo através da metodologia são fundamentais para o seu sucesso no futuro.

O TBL, por sua vez, inspira-se nos preceitos das metodologias ativas de educação e nas evidências de que a melhor forma de aprender determinado conteúdo é aplicando-o e ensinando-o. Soma-se a isso o desenvolvimento de competências socioemocionais cada vez mais importantes para a vida em sociedade e para o desenvolvimento das novas carreiras (Watté (2018)).

## 2.5 GeoGebra

As tecnologias na aprendizagem têm sido amplamente utilizadas para melhorar o processo pedagógico, isto é particularmente verdadeiro no ensino e aprendizagem de disciplinas conceituais como as envolvidas em matemática (Cukierman (2014)).

O software GeoGebra foi criado por Markus Hohenwarter em 2001 na Universidade de Salzburgo, Áustria, e representa um ambiente de aprendizagem digital que foi projetado para combinar geometria, álgebra e cálculo em uma única interface de usuário dinâmica. É uma ferramenta de apoio que possibilita ao aluno criar, explorar, conjecturar, visualizar propriedades geométricas a partir da interação com as figuras, fazendo com que os alunos se acostumem com a ideia de que a Matemática não é imposta, mas obtida (Hohenwarter (2009)).

O software apresenta três diferentes janelas: gráfica, algébrica ou numérica, e a folha de cálculo, o que o torna um CAS (computer algebra system) muito completo e fácil de utilizar (Lopes (2013)).

O Instituto GeoGebra na Cabo Verde está ativamente envolvido na formação de professores e nas atividades de desenvolvimento curricular.

Os principais objetivos do Instituto GeoGebra na Cabo Verde são:

- Estabelecer grupos locais autossustentáveis de usuários do GeoGebra;
- Desenvolver e compartilhar materiais educacionais abertos;

- Organizar e oferecer oficinas para educadores;
- Melhorar e ampliar as funcionalidades do software GeoGebra;
- Desenhar e implementar projetos de pesquisa no GeoGebra e IGI<sup>2</sup>;
- Fazer apresentações em conferências nacionais e internacionais.

O projeto de instalação do Instituto GeoGebra na Cabo Verde foi implementado no ano de 2016, sob a coordenação da Professora Astrigilda Silveira em Cabo Verde e do Professor José Dos Santos em Portugal, e contou com o apoio do Instituto GeoGebra na Portugal, do Politécnico do Porto, da Escola Superior de Educação e da organização dos Estados Ibero-americanos. Deste projeto já resultaram várias publicações de trabalhos realizados pelos formandos.

Em Cabo Verde está a decorrer atualmente formação contínua em GeoGebra para os professores de Matemática dos Ensino Básico e Secundário nos concelhos de Santiago e de São Vicente.

O projeto é apoiado pela Universidade de Cabo Verde, pelas autoridades de Cabo Verde que superintendem os Ensino Básico e Secundário e o Estado Português.

O GeoGebra revelou ser um ambiente eficaz, estimulante para a aprendizagem significativa dos conteúdos geométricos, fácil de utilizar que motiva e estimula a aprendizagem e permite inovar, levando os alunos, de uma forma dinâmica, a construir, visualizar, manipular e estabelecer as relações entre as propriedades dos objetos geométricos (Silveira (2015)).

---

<sup>2</sup>IGI - Instituto GeoGebra Internacional

## Conceitos Trigonométricos

O significado da palavra trigonometria (do grego *trigonon*, "triângulo", e *metron*, "medida") remete-nos ao estudo puro e simples das medidas dos lados, ângulos e outros elementos dos triângulos. A comprovada importância do triângulo, figura básica em qualquer estudo da Geometria, justifica o grande interesse pelo assunto.

Existem inúmeras situações em que a trigonometria é de grande utilidade para outros ramos da ciência, como na engenharia, mecânica, eletricidade, física, astronomia, acústica, medicina, astronomia, música, enfim, em muitos outros campos da actividade humana.

A trigonometria, como os outros ramos da Matemática, não foi obra de um só homem ou nação. Teoremas sobre as razões entre lados de triângulos semelhantes foram conhecidos e usados pelos antigos egípcios e babilônios. É com os gregos em 1595 que pela primeira vez encontramos um estudo sistemático de relações entre ângulos (ou arcos) num círculo e os comprimentos das cordas que os subentendem. As propriedades e relações das cordas, como medidas de ângulos centrais ou inscritos em círculos são expandidas para triângulos quaisquer por meio dos teoremas conhecidos como lei dos senos e lei dos cossenos. Posteriormente, alguns desses resultados são observados em triângulos cujos lados são segmentos notáveis de um círculo trigonométrico (Boyer and Merzbach (2019)).

Um importante conceito no desenvolvimento da trigonometria é o conceito de ângulo e de como efetuar sua medida, uma vez que ele é fundamental em diversas situações, como na compreensão das razões trigonométricas em um triângulo retângulo. Existem evidências de tentativas de medi-los, em datas muito remotas, pois chegaram até nossos dias fragmentos de círculos que parecem ter feito parte de astrolábios primitivos, provavelmente usados com propósitos de medições (Costa (2003)).

De acordo com o currículo e o programa de matemática para o Ensino Secundário em Cabo Verde, a trigonometria é um conteúdo sempre presente neste nível de ensino e com muitas aplicabilidades tanto na matemática quanto na física e em outras áreas do conhecimento. A trigonometria tem a sua génese no 10º Ano de escolaridade, correspondente ao 2º ano do 1º ciclo, onde se inicia o seu estudo através da resolução de triângulos retângulos apresentando as razões trigonométricas básicas (seno, cosseno, tangente e cotangente) e também a resolução de triângulos quaisquer por duas propriedades importantes da tri-

gonometria conhecidas como a lei dos senos e a lei dos cossenos. No 11º Ano dá-se a continuidade a esse estudo, no qual os conteúdos mais relevantes são: o círculo trigonométrico, as funções trigonométricas e as equações trigonométricas. Também se abordam os sistemas de medidas de ângulos e arcos assim como a generalização da noção de ângulos. O ensino deste conteúdo, desde a sua exploração inicial no triângulo retângulo, tem ligações com inúmeras aplicações concretas. Contudo, apesar de serem muito bem exploradas em sala de aula, os professores dão muita ênfase à repetição de fórmulas e de exercícios, o que vem a tornar o estudo mecanizado e sem compreensão.

As figuras deste capítulo são de autoria própria e a maioria delas foram feitas usando o GeoGebra.

### 3.1 Razões trigonométricas no triângulo retângulo

As razões trigonométricas de um determinado ângulo agudo de amplitude  $\alpha$ , podem ser calculadas recorrendo a um qualquer triângulo retângulo que tenha um ângulo interno de amplitude  $\alpha$ . Como todos os triângulos retângulos com um ângulo agudo de amplitude  $\alpha$  são semelhantes, o valor das razões trigonométricas depende apenas de  $\alpha$  e não da medida de comprimento dos lados do triângulo (ver Figura 3.1).

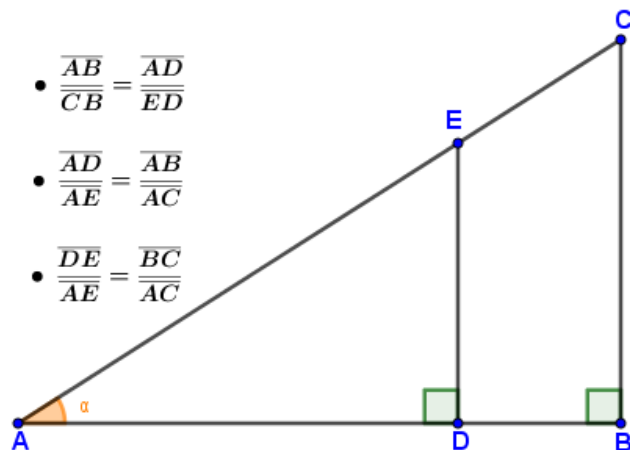


Fig. 3.1: Triângulo retângulo

Repare-se que num triângulo retângulo [ABC] (Figura 3.2) para cada ângulo agudo há um cateto oposto e um cateto adjacente.

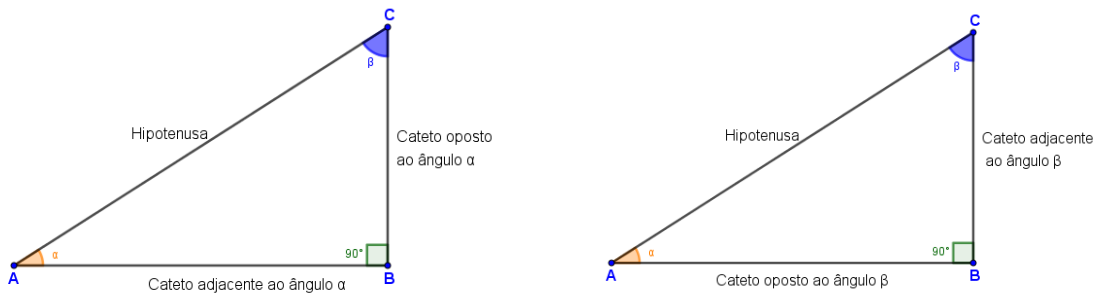


Fig. 3.2: Triângulos retângulos

Na Figura 3.3 apresenta-se o triângulo [ABC] retângulo em  $B$  e com  $\alpha$  a amplitude de um dos ângulos agudos.

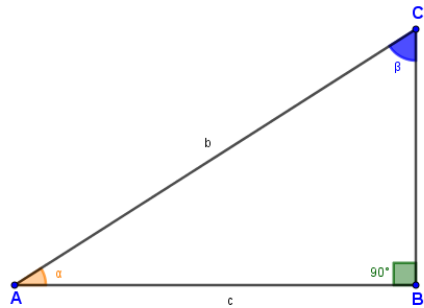


Fig. 3.3: Triângulo retângulo

Num triângulo retângulo define-se:

- hipotenusa como o lado do triângulo oposto ao ângulo reto (o lado [AC] de medida  $b$ ).
- cateto adjacente ao ângulo  $\alpha$  do triângulo é o lado que forma o ângulo, mas não é a hipotenusa (o lado [AB] de medida  $c$ ).
- cateto oposto ao ângulo  $\alpha$  do triângulo é o lado do triângulo que está oposto a  $\alpha$  (o lado [BC] de medida  $a$ ).

As razões trigonométricas no triângulo são as seguintes:

- a razão entre o comprimento do cateto oposto a um ângulo  $\alpha$  e o comprimento da hipotenusa designa-se por seno de  $\alpha$  e representa-se por

$$\sin \alpha = \frac{\text{cateto oposto ao ângulo } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{b}$$

- a razão entre o comprimento do cateto adjacente a um ângulo  $\alpha$  e o comprimento da hipotenusa designa-se por cosseno de  $\alpha$  e representa-se por

$$\cos \alpha = \frac{\text{cateto adjacente ao ângulo } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{b}$$

- a razão entre o comprimento do cateto oposto do ângulo  $\alpha$  e o comprimento do cateto adjacente a esse ângulo designa-se tangente de  $\alpha$  e representa-se por

$$\tan \alpha = \frac{\text{cateto oposto ao ângulo } \alpha}{\text{cateto adjacente ao ângulo } \alpha} = \frac{a}{c}$$

- a razão entre o comprimento do cateto adjacente a um ângulo  $\alpha$  e o comprimento do cateto oposto a esse ângulo designa-se cotangente de  $\alpha$  e representa-se por

$$\cot \alpha = \frac{\text{cateto adjacente ao ângulo } \alpha}{\text{cateto oposto ao ângulo } \alpha} = \frac{c}{a}$$

Repara-se que  $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$  e  $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ .

### 3.2 Razões trigonométricas num triângulo qualquer

Existem duas leis fundamentais na trigonometria de um triângulo qualquer que são: lei dos senos e lei dos cossenos. No que se segue apresentam-se estes dois resultados fazendo referência à sua demonstração.

**Teorema 1. (Lei dos senos)** Em qualquer triângulo  $[ABC]$  (Figura 3.4), as medidas dos lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos, ou seja:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

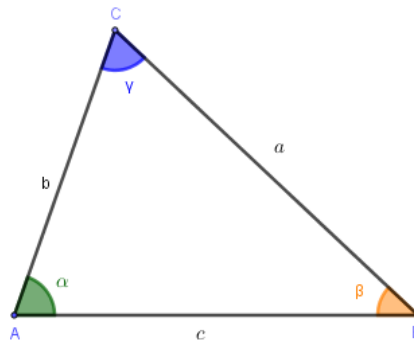


Fig. 3.4: Triângulo qualquer

**Demonstração:**

No que se segue consideram-se 3 casos, onde o triângulo seja retângulo, acutângulo ou obtusângulo.

1º caso: O triângulo  $[ABC]$  é retângulo, reto em A ( $\alpha=90^\circ$ ) representado na Figura 3.5. Os outros dois ângulos,  $\beta$  e  $\gamma$  são agudos e complementares, isto é,  $\beta + \gamma = 90^\circ$  e  $\sin 90^\circ = 1$ .

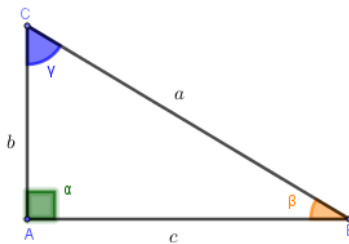


Fig. 3.5: Triângulo retângulo

$$\sin \beta = \frac{b}{a} \Rightarrow a = \frac{b}{\sin \beta} \Rightarrow \frac{a}{1} = \frac{b}{\sin \beta} \Rightarrow \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} \quad (3.1)$$

$$\sin \gamma = \frac{c}{a} \Rightarrow a = \frac{c}{\sin \gamma} \Rightarrow \frac{a}{1} = \frac{c}{\sin \gamma} \Rightarrow \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma} \quad (3.2)$$

De 3.1 e 3.2 concluímos que:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

2º caso: O triângulo  $[ABC]$  é acutângulo de duas alturas:  $[AH_1]$  e  $[BH_2]$  representado na Figura 3.6. Nestas condições os triângulos  $[ABH_1]$ ,  $[BCH_2]$  e  $[ABH_2]$  estão nas condições do 1º caso.

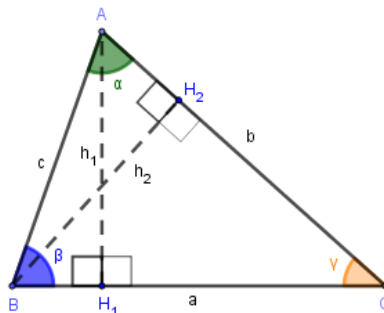


Fig. 3.6: Triângulo Acutângulo

Assim:

- No triângulo  $[ACH_1]$ , retângulo em  $H_1$ , temos  $\sin \gamma = \frac{h_1}{b} \Leftrightarrow h_1 = b \cdot \sin \gamma$ ;

- No triângulo  $[ABH_1]$ , retângulo em  $H_1$ , temos  $\sin \beta = \frac{h_1}{c} \Leftrightarrow h_1 = c \cdot \sin \beta$

Portanto temos:

$$b \cdot \sin \gamma = c \cdot \sin \beta \Leftrightarrow \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} \quad (3.3)$$

- No triângulo  $[BCH_2]$ , retângulo em  $H_2$ , temos:

$$\sin \gamma = \frac{h_2}{a} \Leftrightarrow h_2 = a \cdot \sin \gamma$$

- No triângulo  $[ABH_2]$ , retângulo em  $H_2$ , temos:

$$\sin \alpha = \frac{h_2}{c} \Leftrightarrow h_2 = c \cdot \sin \alpha$$

Portanto temos:

$$a \cdot \sin \gamma = c \cdot \sin \alpha \Leftrightarrow \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma} \quad (3.4)$$

De 3.3 e 3.4 concluímos que

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

**3º caso:** O triângulo  $[ABC]$  é obtusângulo de duas alturas:  $[AH_1]$  e  $[BH_2]$  representado na Figura 3.7. Nestas condições os triângulos  $[ABH_1]$ ,  $[BCH_2]$  e  $[ABH_2]$  estão nas condições do 1º caso, ou seja, são retângulos.

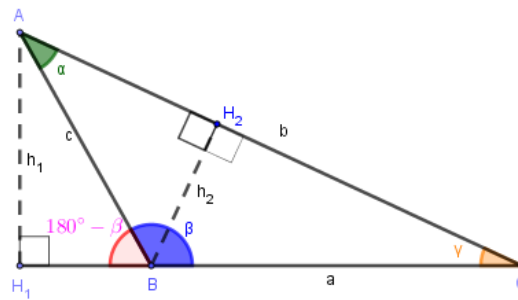


Fig. 3.7: Triângulo Acutângulo

Assim:

- No triângulo  $[ACH_1]$ , retângulo em  $H_1$ , temos

$$\sin \gamma = \frac{h_1}{b} \Leftrightarrow h_1 = b \cdot \sin \gamma$$

- No triângulo  $[ABH_1]$ , retângulo em  $H_1$ , temos

$$\sin(180^\circ - \beta) = \frac{h_1}{c} \Leftrightarrow h_1 = c \cdot \sin(180^\circ - \beta)$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow h_1 &= c \cdot (\sin 180^\circ \cdot \cos \beta - \cos 180^\circ \cdot \sin \beta) \\ \Leftrightarrow h_1 &= c \cdot (0 \cdot \cos \beta - (-1) \cdot \sin \beta) \\ \Leftrightarrow h_1 &= c \cdot \sin \beta \end{aligned}$$

;

Portanto, temos:

$$b \cdot \sin \gamma = c \cdot \sin \beta \Leftrightarrow \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} \quad (3.5)$$

- No triângulo  $[BCH_2]$ , retângulo em  $H_2$ , temos:

$$\sin \gamma = \frac{h_2}{a} \Leftrightarrow h_2 = a \cdot \sin \gamma$$

- No triângulo  $[ABH_2]$ , retângulo em  $H_2$ , temos:

$$\sin \alpha = \frac{h_2}{c} \Leftrightarrow h_2 = c \cdot \sin \alpha$$

e, conseqüentemente,

$$a \cdot \sin \gamma = c \cdot \sin \alpha \Leftrightarrow \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma} \quad (3.6)$$

De 3.5 e 3.6 concluímos que

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

□

**Exemplo 1.** A Figura 3.8 ilustra a lei dos senos.

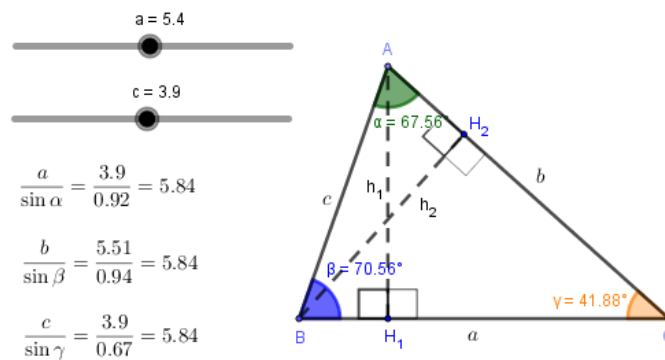


Fig. 3.8: Suporte GeoGebra

Fazendo deslizar os parâmetros  $a$  e  $c$  pode visualizar-se a lei dos senos.

**Teorema 2. (Lei dos cossenos)** Em qualquer triângulo  $[ABC]$  (Figura 3.9), o quadrado da medida de um lado é igual a soma dos quadrados das medidas dos outros dois menos duas vezes o produto das medidas desses lados pelo cosseno do ângulo que eles formam, ou seja:

- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$

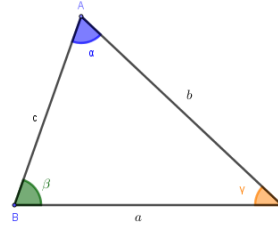


Fig. 3.9: Triângulo qualquer

**Demonstração:**

No que se segue consideram-se 3 casos, consoante o triângulo  $[ABC]$  seja retângulo, acutângulo ou obtusângulo.

1º caso: Considere-se o triângulo retângulo  $[ABC]$  de altura  $\overline{AB}$  (Figura 3.10).

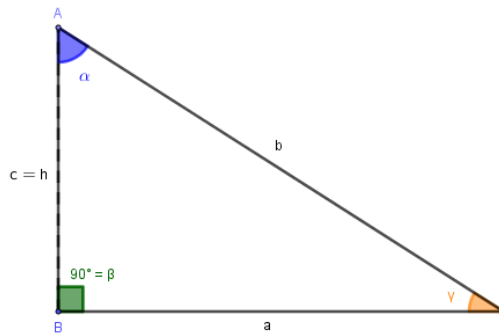


Fig. 3.10: Triângulo retângulo

Como:

$$\begin{aligned}
 1) \quad a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha \\
 &\Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \frac{c}{b} \\
 &\Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2c^2 \\
 &\Leftrightarrow a^2 = b^2 - c^2 \\
 &\Leftrightarrow a^2 + c^2 = b^2
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta \\
 &\Leftrightarrow b^2 = a^2 + c^2 - 2bc \cdot 0 \\
 &\Leftrightarrow b^2 = a^2 + c^2
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma \\
 &\Leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \frac{a}{b} \\
 &\Leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2 - 2a^2 \\
 &\Leftrightarrow c^2 = -a^2 + b^2 \\
 &\Leftrightarrow a^2 + c^2 = b^2
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

De 3.7, 3.8 e 3.9 resulta-se sempre o teorema da Pitágoras:  $b^2 = a^2 + c^2$ .

2º caso: Considere-se o triângulo acutângulo  $[ABC]$  de altura  $[AH]$  e composto por dois triângulos retângulos  $[ABH]$  e  $[ACH]$  (Figura 3.11).

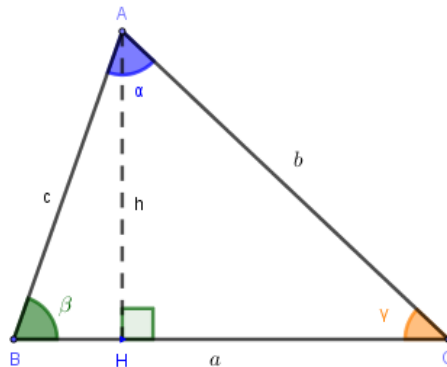


Fig. 3.11: Triângulo Acutângulo

\* No triângulo retângulo  $[ABH]$  temos:

$$\begin{aligned}
 \cos \beta &= \frac{\overline{BH}}{c} \Leftrightarrow \overline{BH} = c \cdot \cos \beta \\
 c^2 &= h^2 + \overline{BH}^2 \Leftrightarrow h^2 = c^2 - \overline{BH}^2 \Leftrightarrow h^2 = c^2 - (c \cdot \cos \beta)^2 \\
 &\Leftrightarrow h^2 = c^2 - c^2 \cdot \cos^2 \beta
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

\* No triângulo retângulo  $[ACH]$  temos:

$$b^2 = h^2 + \overline{CH}^2 \Leftrightarrow h^2 = b^2 - (a - \overline{BH})^2 \Leftrightarrow h^2 = b^2 - (a - c \cdot \cos \beta)^2$$

$$\Leftrightarrow h^2 = b^2 - a^2 + 2ac \cdot \cos \beta - c^2 \cdot \cos^2 \beta \quad (3.11)$$

De 3.10 e 3.11 temos:

$$\begin{aligned} b^2 - a^2 + 2ac \cdot \cos \beta - c^2 \cdot \cos^2 \beta &= c^2 - c^2 \cdot \cos^2 \beta \\ \Leftrightarrow b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta \end{aligned}$$

3º caso: O triângulo obtusângulo  $[ABC]$  de altura  $\overline{AH}$  é composto por dois triângulos retângulos  $[ABH]$  e  $[ACH]$ .

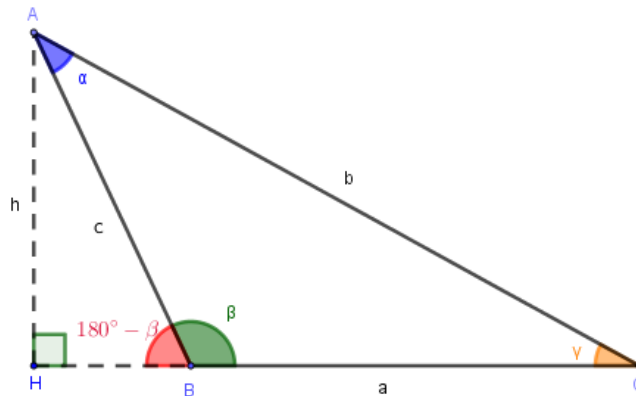


Fig. 3.12: Triângulo obtusângulo

\* No triângulo retângulo  $[ABH]$  temos:

$$\begin{aligned} \cos(180^\circ - \beta) &= \frac{\overline{BH}}{c} \Leftrightarrow -\cos \beta = \frac{\overline{BH}}{c} \Leftrightarrow \overline{BH} = -c \cdot \cos \beta \\ c^2 &= h^2 + \overline{BH}^2 \Leftrightarrow h^2 = c^2 - \overline{BH}^2 \Leftrightarrow h^2 = c^2 - (-c \cdot \cos \beta)^2 \\ &\Leftrightarrow h^2 = c^2 - c^2 \cdot \cos^2 \beta \end{aligned} \quad (3.12)$$

\* No triângulo retângulo  $[ACH]$  temos:

$$\begin{aligned} b^2 &= h^2 + \overline{CH}^2 \Leftrightarrow h^2 = b^2 - (a + \overline{BH})^2 \Leftrightarrow h^2 = b^2 - (a - c \cdot \cos \beta)^2 \\ &\Leftrightarrow h^2 = b^2 - a^2 + 2ac \cdot \cos \beta - c^2 \cdot \cos^2 \beta \end{aligned} \quad (3.13)$$

De 3.12 e 3.13 temos:

$$\begin{aligned} b^2 - a^2 + 2ac \cdot \cos \beta - c^2 \cdot \cos^2 \beta &= c^2 - c^2 \cdot \cos^2 \beta \\ \Leftrightarrow b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta \end{aligned}$$

□

**Exemplo 2.** A Figura 3.13 ilustra um triângulo acutângulo, um retângulo e um obtusângulo.

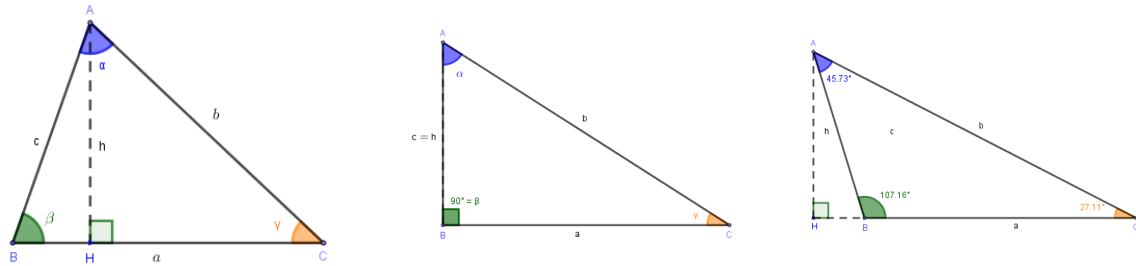


Fig. 3.13: Triângulo acutângulo, retângulo e obtusângulo

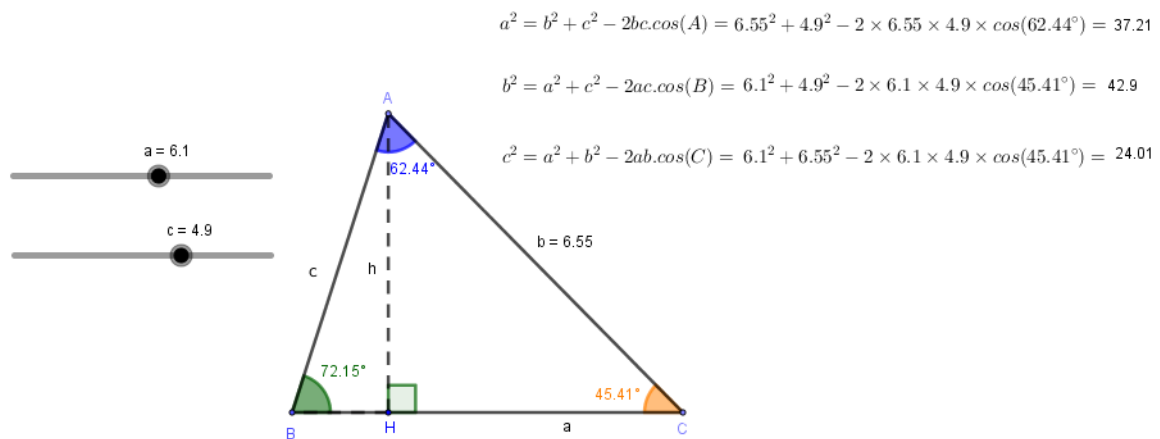


Fig. 3.14: Suporte GeoGebra

Fazendo deslizar os parâmetros  $a$  e  $c$  pode visualizar-se a lei dos cossenos.

### 3.3 Arcos e ângulos

**Definição 1.** Arco geométrico é uma das partes da circunferência delimitada por dois pontos, inclusive. Se os dois pontos coincidirem, teremos um arco nulo ou arco de uma volta.

Todo o arco de circunferência tem um ângulo ao centro correspondente como ilustrado na Figura 3.15.

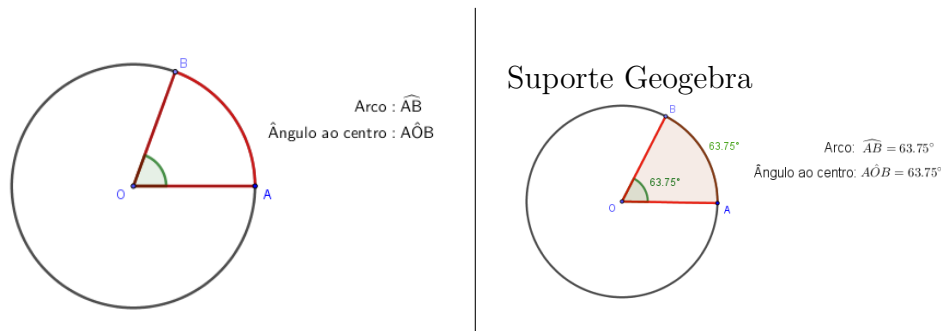


Fig. 3.15: Arcos e ângulos na circunferência

**Definição 2.** *Ângulo orientado é um ângulo não nulo nem giro no qual se fixa um dos lados para lado origem, designando-se o outro lado por lado extremidade.*

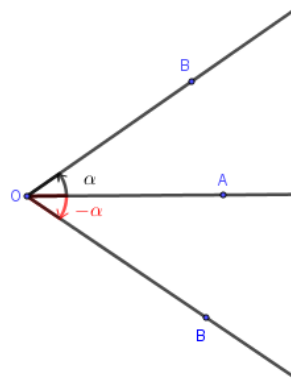


Fig. 3.16: Ângulo orientado

Diz-se que um ângulo orientado de um plano  $\pi$  tem orientação negativa quando, imaginando os movimentos dos ponteiros de um relógio cujo mostrador se supõe situado no mesmo plano  $\pi$ , os ponteiros podem descrever o ângulo começando no lado origem e terminando no lado extremidade; e diz-se que tem orientação positiva no caso contrário.

Para representar que um ângulo tem orientação negativa, afeta-se à sua amplitude o sinal “-”, bem como as respectivas medidas.

A Definição 3, generaliza a noção de ângulo.

**Definição 3.** *Se  $\alpha$  é uma das amplitudes, em graus, de um ângulo orientado, então  $\alpha + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}$  são também amplitudes de um ângulo que tem o mesmo lado origem e o mesmo lado extremidade.*

As unidades mais usadas para medir ângulos (ou arcos) são o grau e o radiano.

**Definição 4.** Seja  $c$  uma circunferência, se dividir  $c$  em 360 partes congruentes, cada uma dessas partes é um arco cuja amplitude é um grau ( $1^\circ$ ).

**Definição 5.** Um radiano ( $rad$ ) é a amplitude de um ângulo que define em qualquer circunferência, com centro no vértice, um arco com comprimento igual ao raio.

Podemos, através de uma regra de três simples, exprimir qualquer ângulo em radianos ou em graus:

$$\alpha = 2\pi \text{ rad} \Leftrightarrow \alpha = 360^\circ \text{ ou } \alpha = \pi \text{ rad} \Leftrightarrow \alpha = 180^\circ$$

**Exemplo 3.** A Figura 3.17 ilustra a equivalência entre graus e radianos

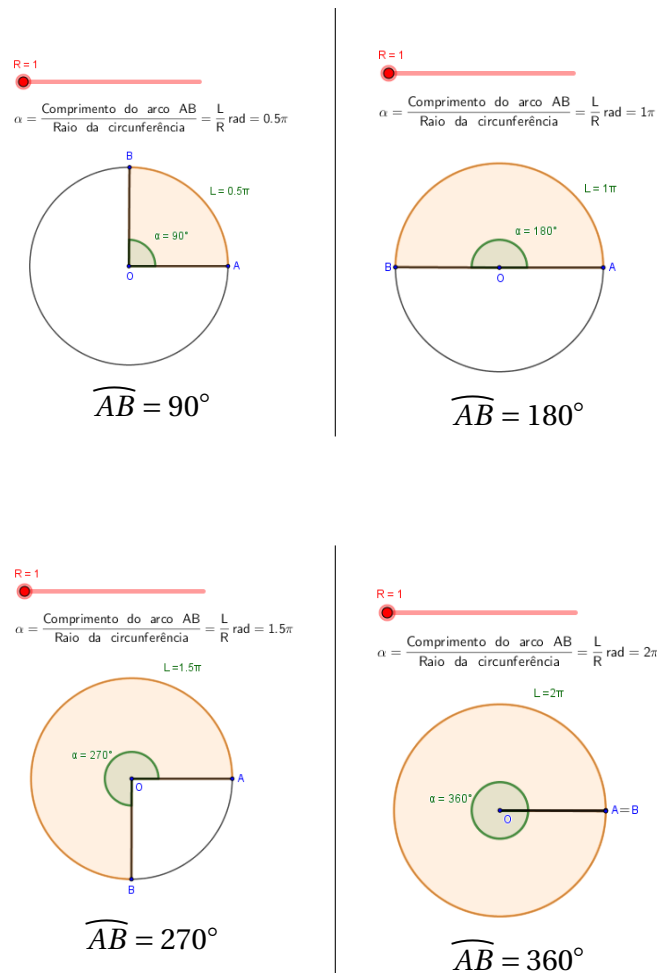


Fig. 3.17: Medir ângulos/GeoGebra

### 3.4 Círculo trigonométrico

**Definição 6.** *Círculo trigonométrico é um círculo cujo raio é 1 unidade de comprimento e com centro na origem do plano cartesiano. Os eixos do plano cartesiano dividem o círculo trigonométrico em 4 quadrantes, na qual o sentido positivo é o anti-horário e o sentido negativo é o horário.*

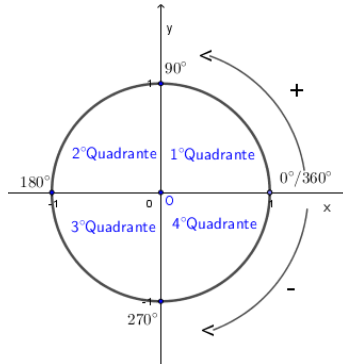
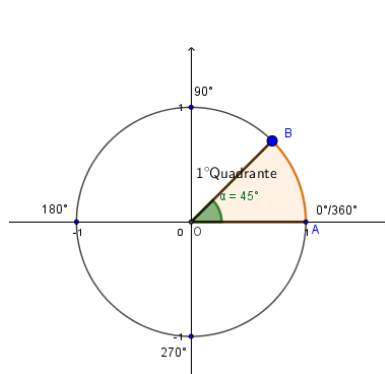


Fig. 3.18: Círculo trigonométrico

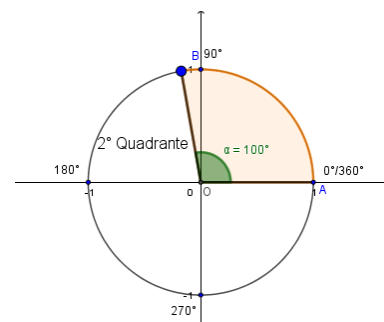
Para determinar em que quadrante se encontra determinado ângulo ou arco, basta verificar o valor do ângulo ou arco com os valores iniciais e finais de cada quadrante:

- 1º quadrante: a amplitude varia de  $0^\circ$  a  $90^\circ$
- 2º quadrante: a amplitude varia de  $90^\circ$  a  $180^\circ$
- 3º quadrante: a amplitude varia de  $180^\circ$  a  $270^\circ$
- 4º quadrante: a amplitude varia de  $270^\circ$  a  $360^\circ$

Na Figura 3.19 apresentam-se ângulos em diferentes quadrantes.



o ângulo  $\alpha$  é do 1º quadrante



o ângulo  $\alpha$  é do 2º quadrante

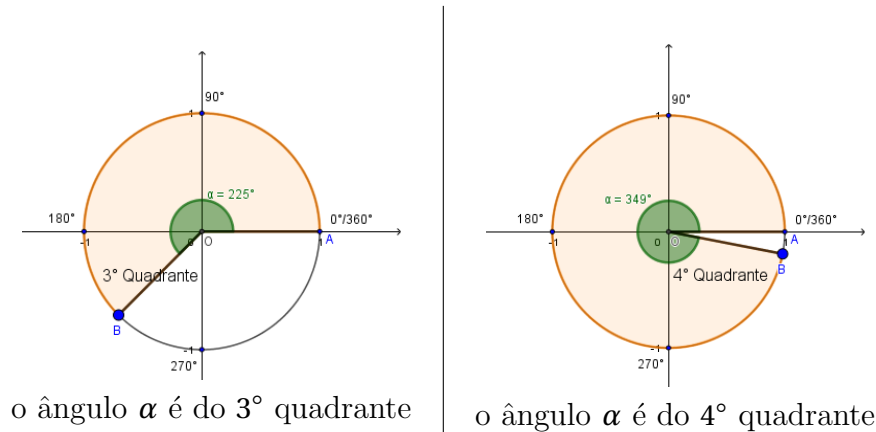


Fig. 3.19: Quadrantes/GeoGebra

### 3.4.1 Razões trigonométricas no círculo trigonométrico

Considere-se o círculo trigonométrico e os pontos  $A$  e  $B$  apresentados na Figura 3.20

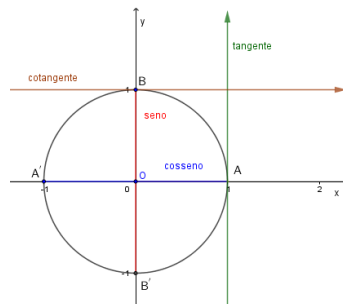


Fig. 3.20: Razões trigonométricas

O eixo  $Ox$  é o eixo dos cossenos com sentido positivo  $O \rightarrow A$  que é denominado lado origem do ângulo, o eixo  $Oy$  é o eixo dos senos com sentido positivo  $O \rightarrow B$  que é denominado lado extremidade do ângulo, a reta vertical que passa pelo ponto  $(1,0)$  é a reta dos tangentes com sentido positivo  $O \rightarrow B$  e a reta horizontal que passa pelo ponto  $(0,1)$  é a reta dos cotangentes com sentido positivo  $O \rightarrow A$ .

No círculo trigonométrico as razões trigonométricas seno e cosseno podem ser identificadas pelas coordenadas do ponto  $B$  na Figura 3.21, cujos sinais dependem do quadrante em que se encontram:

- se o ângulo é do 1º quadrante, todas as razões trigonométricas são positivas.
- se o ângulo é do 2º quadrante, o seno é positivo e o cosseno, a tangente e a cotangente são negativos.
- se o ângulo é do 3º quadrante, o seno e o cosseno são negativos, a tangente e a cotangente são positivos.

- se o ângulo é do 4º quadrante, o cosseno é positivo e o seno, a tangente e a cotangente são negativos.

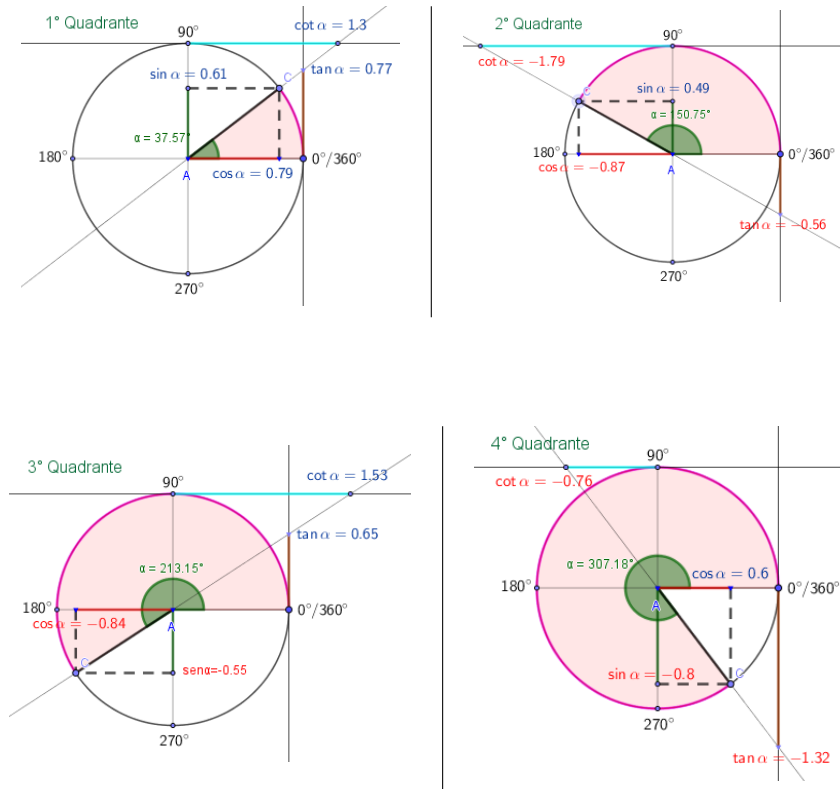


Fig. 3.21: Sinais das razões trigonométricas/GeoGebra

### Resumo de razões trigonométricas de alguns ângulos

Ângulo	grau	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
	Radiano	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
seno		0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cosseno		1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tangente		0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	ND	0	ND	0
cotangente		ND	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	ND	0	ND

ND - não definida

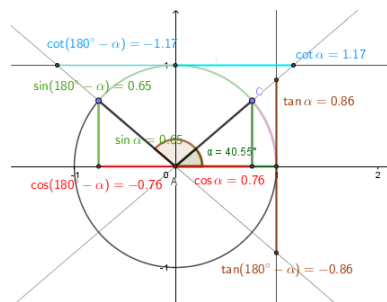
Tab. 3.1: Razões trigonométricas

### 3.4.2 Redução ao 1º quadrante

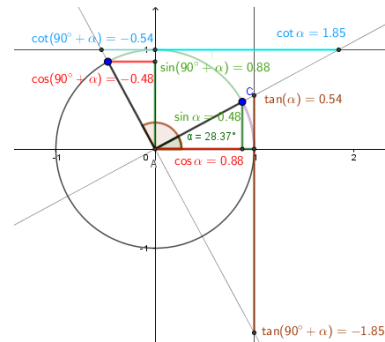
Dado um ângulo de medida  $\beta$  (não do 1º quadrante), pretende-se encontrar no 1º quadrante, um ângulo  $\alpha$  cujas razões trigonométricas, em valor absoluto são as mesmas que as do ângulo  $\beta$ .

1º caso:  $\beta$  é do 2º quadrante.

No círculo trigonométrico podemos concluir imediatamente a relação existente entre as razões trigonométricas de um dado ângulo  $\alpha$  e as de  $180^\circ - \alpha$  ( $\pi - \alpha$ ) e  $90^\circ + \alpha$  ( $\frac{\pi}{2} + \alpha$ )



$$\begin{aligned} \sin(180^\circ - \alpha) &= \sin \alpha = 0.65 \\ \cos(180^\circ - \alpha) &= -\cos \alpha = -0.76 \\ \tan(180^\circ - \alpha) &= -\tan \alpha = -0.86 \\ \cot(180^\circ - \alpha) &= -\cot \alpha = -1.17 \end{aligned}$$

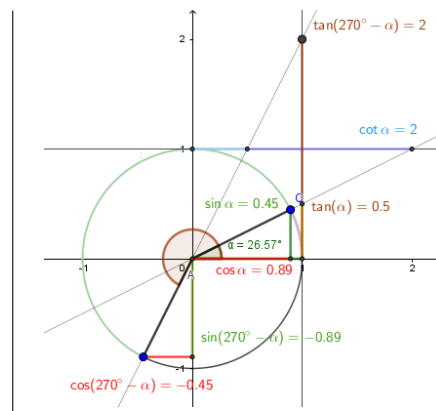
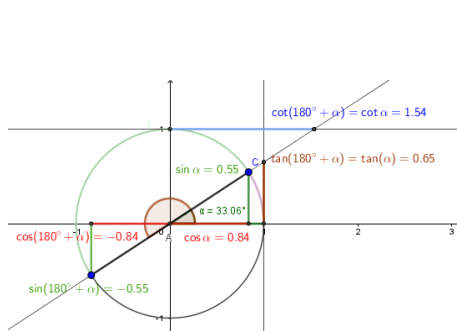


$$\begin{aligned} \sin(90^\circ + \alpha) &= \cos \alpha = 0.88 \\ \cos(90^\circ + \alpha) &= -\sin \alpha = -0.48 \\ \tan(90^\circ + \alpha) &= -\cot \alpha = -1.85 \\ \cot(90^\circ + \alpha) &= -\tan \alpha = -0.54 \end{aligned}$$

Fig. 3.22: 2º quadrante/GeoGebra

2º caso:  $\beta$  é do 3º quadrante.

No círculo trigonométrico podemos concluir imediatamente a relação existente entre as razões trigonométricas de um dado ângulo  $\alpha$  e as de  $180^\circ + \alpha$  ( $\pi + \alpha$ ) e  $270^\circ - \alpha$  ( $\frac{3\pi}{2} - \alpha$ )



$\begin{aligned} \sin(180^\circ + \alpha) &= -\sin \alpha = -0.55 \\ \cos(180^\circ + \alpha) &= -\cos \alpha = -0.84 \\ \tan(180^\circ + \alpha) &= \tan \alpha = 0.65 \\ \cot(180^\circ + \alpha) &= \cot \alpha = 1.54 \end{aligned}$	$\begin{aligned} \sin(270^\circ - \alpha) &= -\cos \alpha = -0.89 \\ \cos(270^\circ - \alpha) &= -\sin \alpha = -0.45 \\ \tan(270^\circ - \alpha) &= \cot \alpha = 2 \\ \cot(270^\circ - \alpha) &= \tan \alpha = 0.5 \end{aligned}$
--	--

Fig. 3.23: 3º quadrante/GeoGebra

3º caso:  $\beta$  é do 4º quadrante.

Recorrendo ao círculo trigonométrico podemos concluir imediatamente a relação existente entre as razões trigonométricas de um dado ângulo  $\alpha$  e as de  $360^\circ - \alpha$  ( $2\pi - \alpha$ ) e  $270^\circ + \alpha$  ( $\frac{3\pi}{2} + \alpha$ )

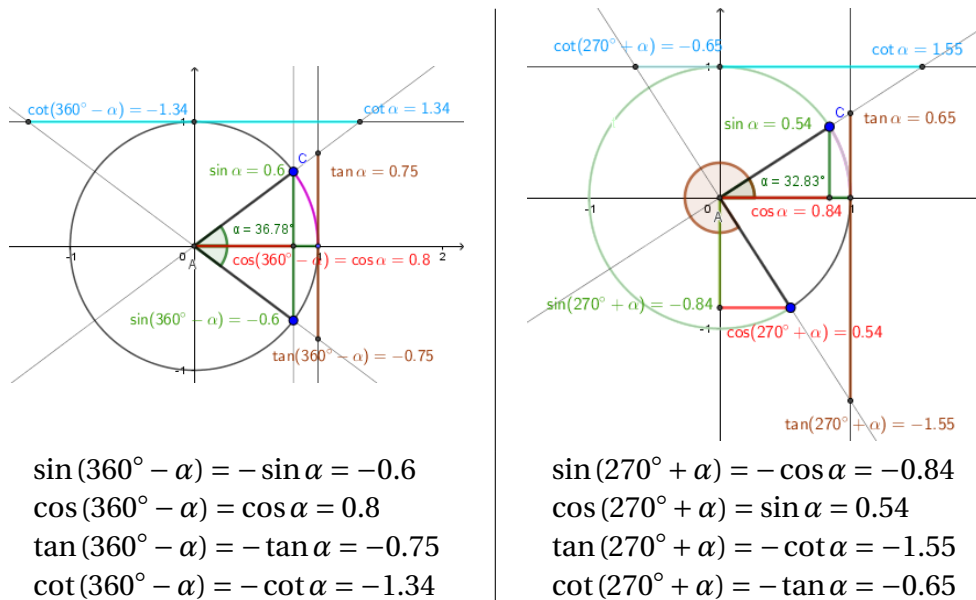


Fig. 3.24: 4º quadrante/GeoGebra

Estas relações são muito úteis, porque pode-se reduzir o cálculo das razões trigonométricas de qualquer ângulo ao cálculo de um ângulo do 1º quadrante.

### 3.5 Funções trigonométricas

As funções trigonométricas como funções reais de variável real, utilizam o ângulo  $x$  (variável) em radianos.

As funções trigonométricas são funções periódicas, isto é, existe um  $p \in \mathbb{R}^+$  tal que  $f(x + p) = f(x)$ ,  $\forall x \in D_f$ .

O menor  $p > 0$  que satisfaz esta condição designa-se período. Recorde-se também os conceitos de função par e ímpar.

**Definição 7.** Seja  $D$  um conjunto simétrico (isto é,  $\forall x \in D, -x \in D$ ). Uma função diz-se:

- Par se  $f(-x) = f(x), \forall x \in D$ .
- Ímpar se  $f(-x) = -f(x), \forall x \in D$ .

### 3.5.1 Função seno

Na Figura 3.25 a função seno é obtida por meio de valores relacionados com o círculo trigonométrico, isto é, consiste em considerar que  $x = \alpha$  e  $y = \sin \alpha$ , e fazendo rodar o ponto  $(x, y)$  no círculo trigonométrico, obtém-se o gráfico da função seno em  $[0, 2\pi]$ .

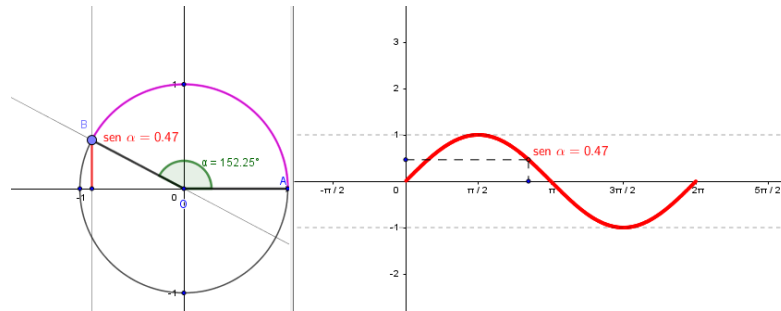


Fig. 3.25: Gráfico da função  $f(x) = \sin x$  para  $x \in [0, 2\pi]$

**Definição 8.** A função seno é uma função real de variável real que associa a cada número real  $x$  em radianos o valor real  $y = \sin x$ , ou seja,

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow \sin x$$

A Figura 3.26 representa o gráfico da função  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = \sin x$ .

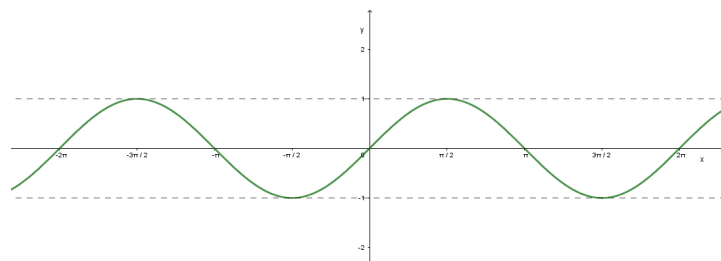


Fig. 3.26: Gráfico  $\sin x$ /GeoGebra

Algumas propriedades da função seno:

- O domínio da função,  $D$ , é  $\mathbb{R}$ .
- O contradomínio da função,  $D'$ , é  $[-1, 1]$ .
- A função seno é uma função periódica, de período  $2\pi$ :  $\sin(2\pi + x) = \sin x, \forall k \in \mathbb{Z}$ .
- A função seno é uma função ímpar,  $\sin(-x) = -\sin x, \forall x \in \mathbb{R}$ .
- A função seno tem máximo absoluto 1 para:  $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}$ .
- A função seno tem mínimo absoluto  $-1$  para:  $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}$ .
- A função seno tem zeros para:  $x = k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}$ .

### 3.5.2 Função cosseno

Na Figura 3.27 a função cosseno é obtida por meio de valores relacionados com o círculo trigonométrico, isto é, consiste em considerar que  $x = \alpha$  e  $y = \cos \alpha$ , e fazendo rodar o ponto  $(x, y)$  no círculo trigonométrico, obtém-se o gráfico da função cosseno em  $[0, 2\pi]$ .

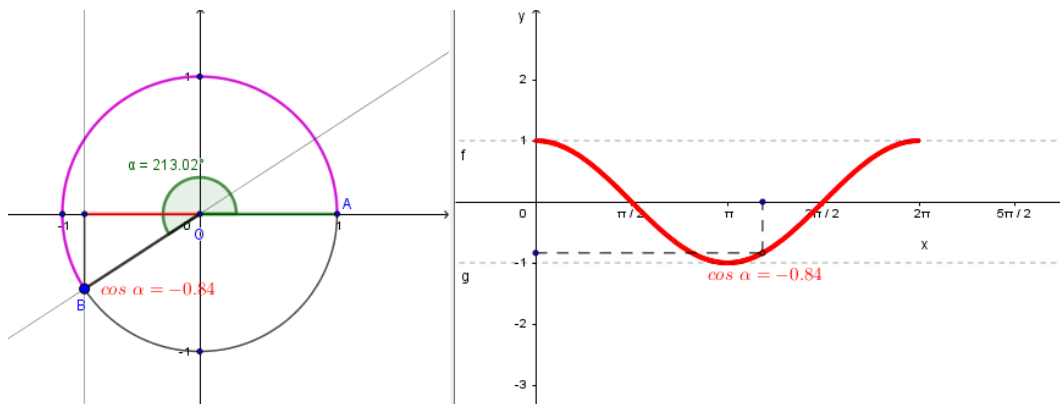


Fig. 3.27: Gráfico da função  $f(x) = \cos x$  para  $x \in [0, 2\pi]$

**Definição 9.** A função cosseno é uma função real de variável real que associa a cada número real  $x$  em radianos o valor real  $y = \cos x$ , ou seja,

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow \cos x$$

A Figura 3.28 representa o gráfico da função  $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = \cos x$ .

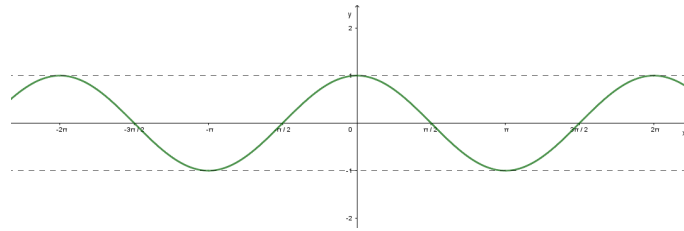


Fig. 3.28: Gráfico  $\cos x$ /GeoGebra

Algumas propriedades da função cosseno:

- O domínio da função,  $D$ , é  $\mathbb{R}$ .
- O contradomínio da função,  $D'$ , é  $[-1, 1]$ .
- A função cosseno é uma função periódica, de período  $2\pi$ :  $\cos(2\pi + x) = \cos x, \forall x \in \mathbb{R}$ .
- A função cosseno é uma função par:  $\cos(-x) = \cos x, \forall x \in \mathbb{R}$
- A função cosseno tem máximo absoluto 1 para:  $x = 2k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}$
- A função cosseno tem mínimo absoluto  $-1$  para:  $x = \pi + 2k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}$
- A função cosseno tem zeros para:  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}$

### 3.5.3 Função tangente

Na Figura 3.29 está representada a função tangente, obtida por meio de valores relacionados com o círculo trigonométrico, isto é, consiste em considerar que  $x = \alpha$  e  $y = \tan \alpha$ , e fazendo rodar o ponto  $(x, y)$  no círculo trigonométrico, obtém-se o gráfico da função tangente em  $[0, 2\pi]$ .

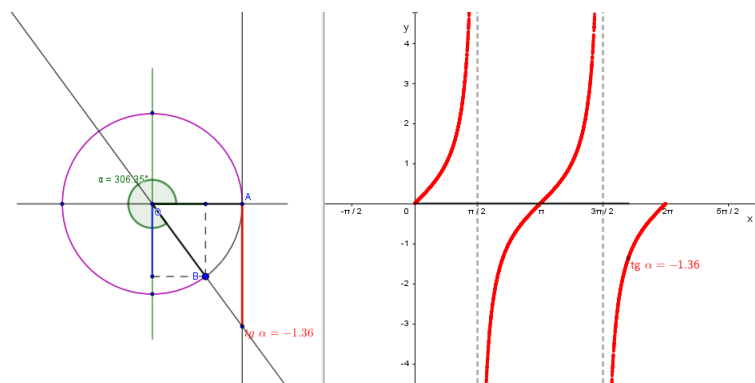


Fig. 3.29: Gráfico da função  $f(x) = \tan x$  para  $x \in [0, 2\pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$

**Definição 10.** A função tangente é uma função real de variável real que associa a cada número real  $x$  em radianos o valor real  $y = \tan x$  no domínio  $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ , ou seja,

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

A Figura 3.30 representa o gráfico da função  $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = \tan x$ . Repare-se que esta função apresenta assíntotas verticais, nas retas  $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

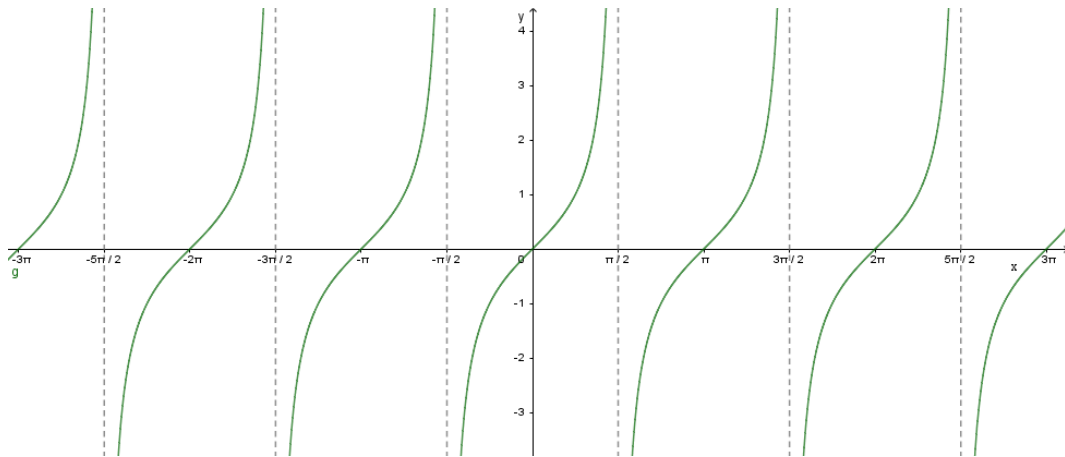


Fig. 3.30: Gráfico  $\tan x$ /GeoGebra

Algumas propriedades da função tangente:

- O domínio da função,  $D$ , é  $\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .
- O contradomínio da função,  $D'$ , é  $\mathbb{R}$ .
- A função tangente é uma função ímpar:  $\tan(-x) = -\tan x, \forall x \in D$ .
- A função tangente é crescente em todos os intervalos do tipo:  $\left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$ .
- A função é periódica de período  $\pi$ :  $\tan(\pi + x) = \tan x, \forall x \in D_f$ .
- A função tangente tem zeros para:  $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .
- As retas  $x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$  são assíntotas do gráfico da função.

### 3.5.4 Função cotangente

Na Figura 3.31 a função cotangente é obtida por meio de valores relacionados com o círculo trigonométrico, isto é, consiste em considerar que  $x = \alpha$  e  $y = \cot \alpha$ , e fazendo rodar o ponto  $(x, y)$  no círculo trigonométrico, obtém-se o gráfico da função cotangente em  $[0, 2\pi]$ .

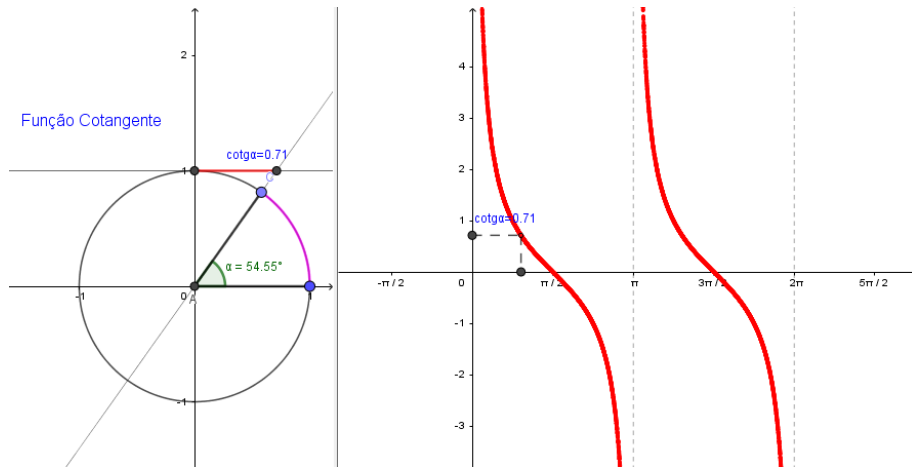


Fig. 3.31: Gráfico da função  $f(x) = \cot x$  para  $x \in ]0, 2\pi[ \setminus \{\pi\}$

**Definição 11.** A função cotangente é uma função real de variável real que associa a cada número real  $x$  em radianos o valor real  $y = \cot x$  no domínio  $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ , ou seja,

$$f: D \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

A Figura 3.32 representa o gráfico da função  $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = \cot x$ .

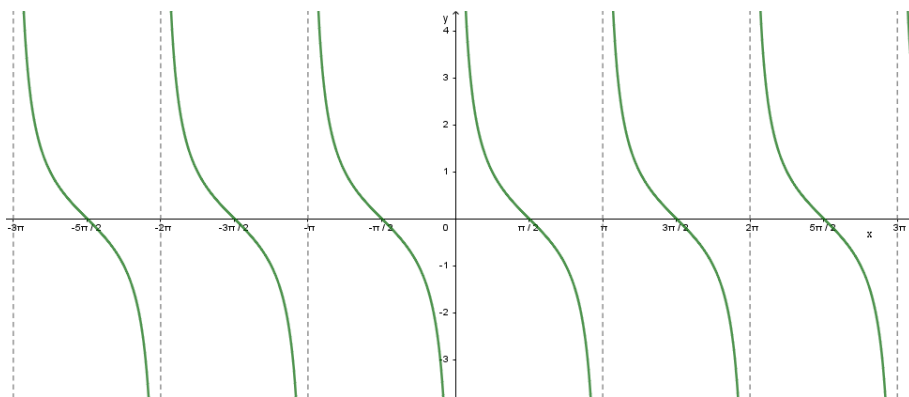


Fig. 3.32: Gráfico de  $\cot x$ /GeoGebra

Algumas propriedades da função cotangente:

- O domínio da função,  $D$ , é  $\{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .
- O contradomínio da função,  $D'$ , é  $\mathbb{R}$ .
- A função é uma função ímpar:  $\cot(-x) = -\cot x, \forall x \in D$ .
- A função cotangente é decrescente em todos os intervalos dos tipo:  $]k\pi, \pi + k\pi[$ .
- A função é periódica de período  $\pi$ :  $\cot(\pi + x) = \cot x, \forall x \in D$ .
- A função cotangente tem zeros para:  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .
- As retas  $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$  são assíntotas do gráfico da função.

Algumas relações trigonométricas são fundamentais para a resolução de problemas em trigonometria e a fundamental é a igualdade:  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ , para todo o  $x \in \mathbb{R}$ . Desta igualdade deduzem-se as igualdades 3.15 dividindo a igualdade 3.14 por  $\cos^2 x$  e a igualdade 3.16 dividindo 3.14 por  $\sin^2 x$ .

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \text{ para todo } x \in \mathbb{R} \quad (3.14)$$

$$\tan^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x} \text{ para todo } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad (3.15)$$

$$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} \text{ para todo } x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad (3.16)$$

### 3.6 Equações trigonométricas

**Definição 12.** Chama-se equação trigonométrica qualquer equação na qual a incógnita faz parte do ângulo (ou arco) de alguma função trigonométrica.

\* Equação do tipo  $\sin x = a$  ou  $\sin x = \sin \alpha$

De um modo geral para as equações do tipo  $\sin x = a$ , tem-se:

- A equação só tem soluções se  $a \in [-1, 1]$ .
- Existem dois valores no intervalo  $[-\pi, \pi]$  que têm o mesmo seno: se um é  $\alpha$  o outro é  $\pi - \alpha$  (Figura 3.33).

Como a função seno é periódica de período  $2\pi$ , vem

$$\sin x = \sin \alpha \Rightarrow x = \alpha + 2k\pi \quad \vee \quad x = \pi - \alpha + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

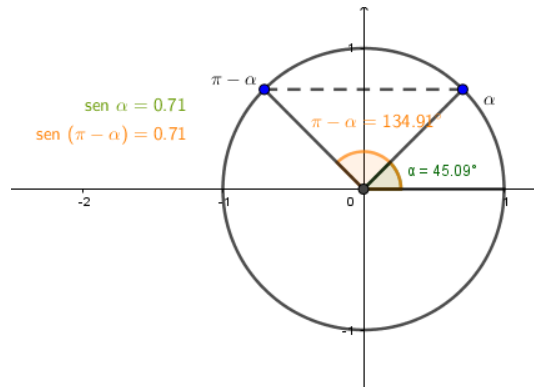


Fig. 3.33: Seno/GeoGebra

\* Equação do tipo  $\cos x = a$  ou  $\cos x = \cos \alpha$

De um modo geral para as equações do tipo  $\cos x = a$ , tem-se:

- A equação só tem soluções se  $a \in [-1, 1]$ .
- Existem dois valores no intervalo  $[-\pi, \pi]$  que têm o mesmo cosseno: se um é  $\alpha$  o outro é  $-\alpha$  (Figura 3.34).

Como a função cosseno é periódica de período  $2\pi$ , vem

$$\cos x = \cos \alpha \Rightarrow x = \alpha + 2k\pi \vee x = -\alpha + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

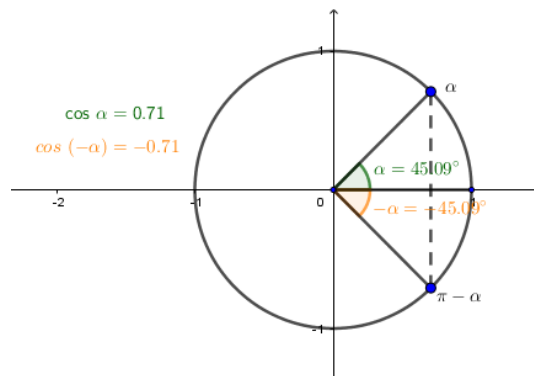


Fig. 3.34: Cosseno/GeoGebra

\* Equação do tipo  $\tan x = a$  ou  $\tan x = \tan \alpha$

De um modo geral para as equações do tipo  $\tan x = a$ , tem-se sempre soluções, qualquer que seja  $a \in \mathbb{R}$  (Figura 3.35).

Como a função tangente é periódica de período  $\pi$ , vem

$$\tan x = \tan \alpha \Rightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

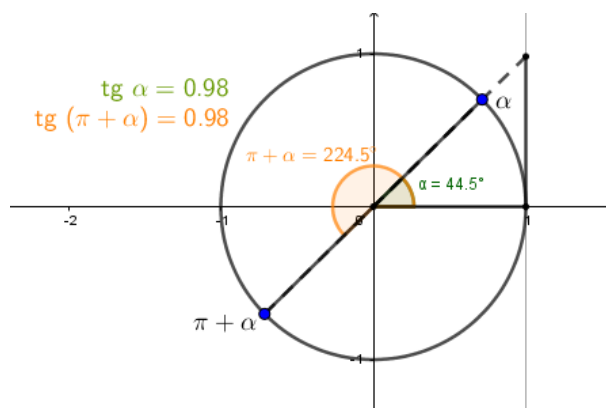


Fig. 3.35: Tangente/GeoGebra

\* Equação do tipo  $\cot x = a$  ou  $\cot x = \cot \alpha$

De um modo geral para as equações do tipo  $\cot x = a$ , tem-se sempre soluções, qualquer que seja  $a \in \mathbb{R}$  (Figura 3.36).

Como a função cotangente é periódica de período  $\pi$ , vem

$$\cot x = \cot \alpha \Rightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

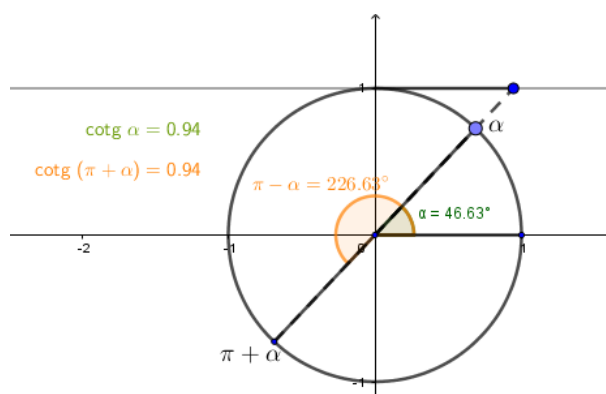


Fig. 3.36: Tangente/GeoGebra

Neste capítulo, foram elaborados os conteúdos que são abordados no Ensino Secundário em Cabo Verde de uma forma bem detalhada, de modo a servir como suporte teórico para resolução das atividades.

No capítulo seguinte apresentam-se algumas atividades.

## Realização das Atividades, Análise e Discussão dos Resultados

### 4.1 Estratégias metodológicas

A estratégia metodológica adotada neste trabalho contou com uma pesquisa essencialmente qualitativa. Segundo Bogdan e Biklen [Bogdan and Biklen \(1994\)](#), as estratégias qualitativas permitem ao pesquisador perceber se as suas expectativas são verificadas, através da observação do desempenho dos seus alunos nas atividades que lhes são propostas, nos procedimentos que realizam e nas interações com os pares e com o professor.

Para a realização das atividades adotou-se um método de ensino baseado nos ideais do construtivismo, colaborativo, interativo e da aprendizagem centrada no aluno ([Michaelsen \(1982\)](#)). Ao usar o PBL, os professores ajudam os alunos a se concentrarem na resolução de problemas no contexto da vida real, incentivando-os a considerar a situação em que existe um problema e a tentar encontrar uma solução ([Ezhilarasi et al. \(2017\)](#)). Neste trabalho seguiu-se uma metodologia PBL em detrimento do TBL dadas as restrições de tempo disponível para a realização da experiência (final do ano letivo 2020/21). Contudo, adotou-se a fase 3 da Metodologia TBL (confrontar figura 2.2): um único problema para todas os grupos da turma e apresentação discussão dos resultados por todos os grupos. Esta experiência poderia ter sido enriquecida se tivesse sido planeada com mais tempo, nomeadamente com a inclusão de um pré-teste (o correspondente GRAT do TBL) e de um pós-teste, para uma efetiva avaliação dos resultados de aprendizagem.

As atividades foram resolvidas seguindo as quatro fases do Modelo de Polya (1995).

As experiências decorreram entre 2 Junho de 2021 e 30 de Junho de 2021, com a participação de 18 alunos divididos em grupos de 3 elementos. A escolha das turmas foi feita tendo por critérios o reconhecimento do impacto que este tipo de experiência teria nos alunos envolvidos neste tipo de experiência e a sua disponibilidade em colaborar.

As 4 aulas das experiências em grupo, tiveram a duração de, aproximadamente, 360 minutos. Nessas aulas foram aplicadas 4 atividades (que se encontram no anexo A), envolvendo os conceitos trigonométricos abordados no Ensino Secundário em Cabo Verde.

As atividades foram elaborados de forma a serem realizadas em sala de aulas, onde havia disponibilidade de portáteis com instalação de software GeoGebra. No decorrer das atividades o professor atuou como orientador, colocando questões para ajudar a conduzir a investigação e observador.

A primeira aula foi iniciada com uma breve apresentação da proposta da experiência a ser realizada na sala de aula, bem como os conteúdos que iriam ser abordados e os alunos realizaram as atividades 1 e 2.

Na segunda aula introduziu-se o círculo trigonométrico, sinais das razões trigonométricas em cada quadrante, fez-se a conversão dos ângulos de graus em radianos e vice-versa, e fez-se referência às funções trigonométricas e equações que envolvem estas funções.

A terceira aula foi dedicada à resolução das atividades 3 e 4.

Na quarta e última aula, cada grupo apresentou os resultados de todas as atividades realizadas durante a experiência e de seguida comparou os resultados, tendo o professor atuado como moderador. Nesta aula foi introduzida a utilização do GeoGebra de modo a consolidar os conceitos e confrontar os resultados obtidos no GeoGebra com os resultados encontrados anteriormente.

## **4.2 Caraterização da escola e das turmas**

As experiências foram realizadas na Escola Secundária Cónego Jacinto Peregrino da Costa, agrupamento V, concelho Praia, situado ao lado do Palácio do Governo. A Escola tinha 1204 alunos, 79 professores e 47 turmas: 8 de 7º ano, 10 de 8º ano, 10 de 9º ano, 5 de 10º ano, 7 de 11º ano (3 CT, 1 ES e 3 H), 7 de 12º (2 CT, 2 ES e 3 H). As atividades foram realizadas em duas turmas de 11º Ano da área de Ciências e Tecnologias (CT2\_1 e CT2\_2). A turma CT2\_1 é constituída por 9 alunos e a turma CT2\_2 é constituída por 14 alunos mas apenas participaram na experiência 9 alunos. Os alunos envolvidos na experiência frequentam o 11º ano pela primeira vez e tem idades compreendidas entre os 16 e os 17 anos.

Em cada turma formaram-se 3 grupos. Na turma CT2\_2 um dos grupos desistiu, ou seja, não participou nas atividades 3 e 4.

### 4.3 Planificação geral das atividades letivas

Aulas	Tópicos	Objetivos	Atividades
Aula 1 (90 minutos)	Razões trigonométricas  Problemas envolvendo distâncias e razões trigonométricas	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Rever elementos de um triângulo retângulo: cateto oposto, adjacente e hipotenusa.</li> <li>• Definir as razões trigonométricas: seno, cosseno e tangente.</li> <li>• Usar calculadora.</li> <li>• Relacionar os dados do problema com o que é pedido para determinar.</li> <li>• Consolidar conteúdos.</li> </ul>	Atividade 1  Atividade 2
Aula 2 (90 minutos)	<p>Conceitos trigonométricos:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Ângulos e arcos</li> <li>• Círculo trigonométrico</li> <li>• Razões trigonométricas</li> <li>• Redução ao 1º quadrante</li> <li>• Funções e equações trigonométricas</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Reconhecer a existência de periodicidade.</li> <li>• Determinar o domínio e o contradomínio.</li> <li>• Determinar máximo e mínimo.</li> <li>• Representar graficamente uma função trigonométrica.</li> <li>• Resolver equações trigonométricas.</li> </ul>	
Aula 3 (90 minutos)	Problemas de aplicação das funções trigonométricas.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Consolidar conhecimentos sobre a trigonometria.</li> <li>• Reconhecer e experienciar diferentes contextos na resolução de problemas.</li> <li>• Desenvolver a capacidade de argumentação e de resolução de problemas.</li> </ul>	Atividade 3  Atividade 4
Aula 4 (90 minutos)	Utilização do software GeoGebra na resolução das atividades. Análise e discussão dos resultados	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Consolidar conhecimentos sobre a trigonometria.</li> <li>• Permitir aos alunos ver a resolução de atividades de forma mais dinâmica.</li> <li>• Desenvolver o estudo de funções trigonométricas, utilizando GeoGebra.</li> <li>• Interpretar gráficos de funções trigonométricas.</li> </ul>	Revisitar as Atividades de 1 a 4

Tab. 4.1: Plano de atividades letivas

## 4.4 Atividade 1

A atividade 1 (ver Apêndice A.1) destina-se a recordar alguns conhecimentos prévios sobre as razões trigonométricas do triângulo retângulo e relacionar com algo do cotidiano. Os alunos tinham que medir os lados do quadro da sala de aula e tirar conclusões sobre o ângulo e a medida da diagonal, conforme ilustrado na Figura 4.1. A atividade apresenta os seguintes objetivos:

- Aplicar as definições das razões trigonométricas num triângulo retângulo;
- Relacionar a interpretação algébrica com a interpretação geométrica;
- Interpretar os resultados obtidos, ou seja, o que eles representam.

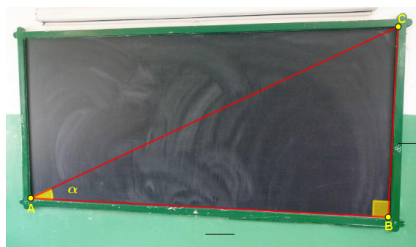


Fig. 4.1: Quadro da sala de aula

### 4.4.1 Análise da aplicação da atividade 1

A Figura 4.2 ilustra como foi realizada a recolha dos dados pelos grupos.



Fig. 4.2: Recolha de dados da atividade 1

Depois de recolha dos dados, fizemos breves revisões sobre razões trigonométricas no triângulo retângulo e num triângulo qualquer a pedido dos alunos, porque disseram que não tinham percebido bem no 10<sup>o</sup> Ano. O que permitiu constatar que estes conteúdos não estavam consolidados. Na fase seguinte planeou-se a resolução, estabeleceu-se a relação entre os elementos e equacionou-se o problema.

A Figura 4.3 ilustra o momento em que os alunos estavam a planear e a resolver os problemas em grupo.



Fig. 4.3: Resolução e execução da atividade 1

A Figura 4.4 ilustra as resoluções da alínea a) dos grupos 1 e 3 para determinar a medida da diagonal.

a) A diagonal [AC] mede \_\_\_\_\_.

Grupo 1

a) A diagonal [AC] mede

$$h^2 = c^2 + a^2$$

$$h^2 = (4,12\text{m})^2 + (3,65\text{m})^2$$

$$h^2 = 17,3544 + 13,3225$$

$$h^2 = 30,6769$$

$$h = \sqrt{30,6769}$$

$$h = 5,54\text{m}$$

Grupo 2

Dados:

Vertical  $\rightarrow 112\text{cm}$  ( $\rightarrow 1\text{m e } 12\text{cm}$ )

horizontal  $\rightarrow 240\text{cm}$  ( $\rightarrow 2\text{m e } 40\text{cm}$ )

a)  $h^2 = c^2 + a^2$

$$h^2 = 112^2 + 240^2$$

$$= 12544 + 57600$$

$$= 70144$$

$$= 264,8\text{cm}$$

$$= 2,65\text{m}$$

Fig. 4.4: Resoluções alínea a da atividade 1 pelos grupos 1 e 2

Na resolução apresentada da Figura 4.4, mostra que os dois grupos chegaram praticamente ao mesmo valor, utilizando a Teorema de Pitágoras para determinar a diagonal do quadro da sala de aula. Dá para perceber a facilidade em determinar os catetos e a hipotenusa do triângulo retângulo. Nesta questão não usaram razões trigonométricas. A Figura 4.5 ilustra as resoluções da alínea b) dos grupos 1 e 2 para determinar o ângulo.

b) O valor de  $\alpha$  é \_\_\_\_.

<p>Grupo 1</p> $b) \operatorname{sen} \alpha = \frac{c_0}{h}$ $\operatorname{sen} \alpha = \frac{1,12 \text{ m}}{2,64 \text{ m}}$ $\alpha = \operatorname{sen}^{-1}(0,42)$ $\alpha = 24,84^\circ$	<p>Grupo 2</p> $b) \operatorname{Sen} \alpha = \frac{b}{c} \Leftrightarrow \operatorname{Sen}^{-1}\left(\frac{b}{c}\right)$ $= \operatorname{Sen}^{-1}\left(\frac{1,12}{2,65}\right)$ $= 25$
---	--

Fig. 4.5: Resoluções da alínea b da atividade 1 pelos grupos 1 e 2

A Figura 4.5, mostra que os dois grupos usaram a razão trigonométrica seno na resolução da segunda questão para determinar a amplitude do ângulo  $\alpha$ .

#### 4.4.2 Conclusão da atividade 1

Nesta atividade os alunos recorreram ao conhecimento prévio sobre Teorema de Pitágoras para resolver a primeira questão. Os grupos não tiveram dificuldade em aplicar as razões trigonométricas na atividade proposta.

Da observação no decorrer da atividade e das respostas apresentadas, pude constatar que os pré-requisitos necessários ao estudo das funções trigonométricas, nomeadamente a trigonometria do triângulo retângulo, era um conteúdo que os alunos dominavam, contudo, a falta de rigor na escrita matemática é muito comum (o uso indiscriminado dos sinais de igual e equivalente, por exemplo), e esta atividade permitiu corroborar essa ideia.

### 4.5 Atividade 2

A atividade 2 (ver Apêndice A.2) destina-se a recordar alguns conhecimentos prévios sobre as razões trigonométricas do triângulo qualquer e relacionar com algo do cotidiano. Os alunos marcavam 3 pontos no chão da sala, de modo a obterem um triângulo. Determinavam as medidas de dois lados e o ângulo formado por esses lados, conforme ilustra a Figura 4.6. A atividade apresenta os seguintes objetivos:

- Aplicar as definições das razões trigonométricas num triângulo qualquer;
- Relacionar a interpretação algébrica com a interpretação geométrica;
- Interpretar os resultados obtidos, ou seja, o que eles representam.

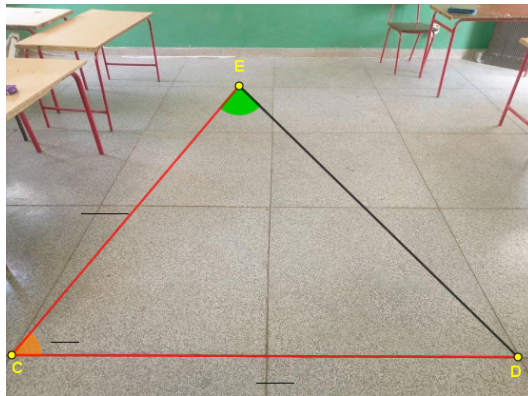


Fig. 4.6: Chão da sala de aula

#### 4.5.1 Análise da aplicação da atividade 2

A Figura 4.7 ilustra o momento de recolha dos dados pelos grupos, ou seja, comprimentos de dois lados do triângulo e o ângulo formado por esses dois lados, onde usaram os seguintes materiais: pregos, linha, fita métrica e transferidor. Depois dos dados recolhidos, planeou-se a resolução, estabeleceu-se a relação entre os elementos e equacionou-se o problema e, da sua resolução, obteve-se o resultado pretendido.

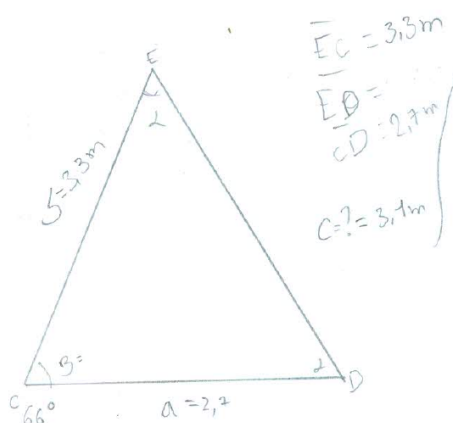
A Figura 4.8 ilustra as resoluções da alínea a) dos grupos 1 e 3 da atividade 2.



Fig. 4.7: Recolha de dados da atividade 2

a) Determina o comprimento do lado [DE]

Grupo 1



$$\begin{aligned}
 c^2 &= a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos B \\
 &= (3,3 + 2,7)^2 - 2 \cdot 2,7 \cdot 3,3 \cdot \cos 66^\circ \\
 &= 18,16 - 17,82 \cdot 0,46 \\
 &= 18,16 - 8,14 \\
 c^2 &= 9,99 \\
 c &= \sqrt{9,99} \\
 c &= 3,16 \text{ m}
 \end{aligned}$$

Grupo 3

Atividade II

$$\begin{aligned}
 a^2 &= 3,16^2 + 2^2 - 2 \times 3,16 \times 2 \times \cos 73^\circ \\
 a^2 &= 9,98 + 4 - 12,64 \times 0,29 \\
 a^2 &= 10,31 \\
 a &= \sqrt{10,31} \\
 a &= 3,21
 \end{aligned}$$

Fig. 4.8: Resoluções da alínea a da atividade 2 pelos grupos 1 e 3

Analisando as resoluções apresentadas na Figura 4.8, constata-se que os alunos foram capazes de ilustrar e recolher os dados do problema. Apesar dos dados recolhidos pelos grupos serem diferentes, todos usaram a lei dos cossenos para determinar o comprimento do terceiro lado do triângulo.

A Figura 4.9 ilustra as resoluções da alínea b) de dois grupos para a determinação da amplitude do ângulo.

b) Qual é a amplitude do ângulo formado por lados [DE] e [EC]?

<p style="text-align: center;">Grupo 1</p> $\frac{c}{\text{sen } B} = \frac{a}{\text{sen } A}$ $\frac{3,1}{\text{sen } 66^\circ} = \frac{2,7}{\text{sen } \alpha}$ $\frac{3,1}{0,91} = \frac{2,7}{\text{sen } \alpha}$ $\Rightarrow 3,1 \times \text{sen } \alpha = 2,7 \times 0,91$ $\Rightarrow \text{sen } \alpha = \frac{2,45}{3,1}$ $\Rightarrow \text{sen } \alpha = 0,79$	<p style="text-align: center;">Grupo 3</p> <p>b) <math>\frac{3,21}{\text{sen } 73^\circ} = \frac{2 \text{ m}}{\text{sen } \alpha}</math></p> $3,21 \cdot \text{sen } \alpha = 2 \times 0,95$ $3,21 \cdot \text{sen } \alpha = 1,9$ $\text{sen } \alpha = \frac{1,9}{3,21}$ $\text{sen } \alpha = 0,59$ $\alpha = \text{sen}^{-1}(0,59)$ $\alpha = 36,16^\circ$
--	--

Fig. 4.9: Resoluções da alínea b da atividade 2 pelos grupos 1 e 3

Nesta questão os alunos usaram a lei dos senos para determinar a amplitude do segundo ângulo, mas o grupo 1 não chegou ao resultado final.

Relativamente à classificação dos triângulos as respostas dadas pelos dois grupos constam da Figura 4.10.

c) Classifica o triângulo [CDE] quanto aos lados.

<p style="text-align: center;">Grupo 1</p> <p>c) Triângulo escaleno p.a. todos os lados são diferentes.</p>	<p style="text-align: center;">Grupo 3</p> <p>c) Quanto aos lados o triângulo é Escaleno, pois os 3 lados possuem medidas diferentes.</p>
---	---

Fig. 4.10: Resoluções da alínea c da atividade 2 pelos grupos 1 e 3

Nesta questão os grupos usaram os seus conhecimentos prévios sobre classificação do triângulo quanto ao comprimento dos lados, não tendo apresentado qualquer dificuldade na resposta.

### 4.5.2 Conclusão da atividade 2

Nesta atividade é de constatar a motivação e a dinâmica por parte dos alunos logo na recolha dos dados. Durante a resolução da atividade um elemento de um grupo questionou que a solução encontrada não fazia sentido, visto que, o comprimento de lado devia ser maior. De seguida, foram verificar os dados recolhidos e chegaram à conclusão que um dos dados utilizado estava errado. Os grupos não tiveram dificuldade em relacionar a interpretação algébrica com a interpretação geométrica.

Da realização desta atividade constata-se a facilidade que os alunos tiveram em recolher os dados e identificar os conceitos implícitos na resolução do problema.

## 4.6 Atividade 3

A atividade 3 (ver Apêndice A.3) refere-se a uma roda gigante ilustrada na Figura 4.11 na qual o professor está pendurado. Em cada instante  $t$  o professor encontra-se a uma altura (em metros), em relação ao solo, dada pela expressão

$$h(t) = 11,5 + 10 \sin \left[ \frac{\pi}{12} (t - 26) \right]$$

onde o tempo  $t$  é dado em segundos e a amplitude em radianos. Com a atividade 3 pretende-se que os alunos compreendam o conceito da função seno numa situação concreta, respondendo a questões em que têm de apresentar o seu raciocínio através da resolução algébrica. Num segundo momento os alunos recorrem ao software GeoGebra para implementar a função e comparar com os seus resultados algébricos obtidos. Também analisam o que acontece quando se altera o valor de cada um dos parâmetros, com a orientação do professor. A atividade apresenta os seguintes objetivos:

- Reconhecer o uso de funções trigonométricas numa situação-problema;
- Aplicar a definição de função do tipo seno a partir da situação proposta;
- Introduzir a definição de cada parâmetro e análise das suas influências em funções do tipo:

$$h(t) = a + b \sin \left[ \frac{\pi}{c} (t - d) \right], c \neq 0;$$

- Relacionar a interpretação algébrica com a interpretação geométrica;
- Interpretar os resultados obtidos, ou seja, o que eles representam.



Fig. 4.11: Roda gigante

#### 4.6.1 Análise da aplicação da atividade 3

Para melhor compreensão e dinamização desta atividade, os alunos utilizaram o software GeoGebra concretizando os parâmetros e, sob a orientação do professor tendo em conta que era a primeira vez que estavam em contato com o software, analisaram os resultados em cada situação.

As imagens apresentadas na Figura 4.12 ilustram momentos da realização da atividade:



Fig. 4.12: Resolução e execução da atividade 3

A Figura 4.13 ilustra as resoluções da alínea a) dos grupos para determinar a altura em

que o professor estava quando a roda começou a girar.

a) Determina a altura em que o professor estava quando a roda começou a girar ( $t = 0$ ).

Grupo 2

$$\begin{aligned} \text{a) } h(0) &= 11,5 + 10 \operatorname{sen} \left[ \frac{\pi}{12} (0 - 26) \right] \\ &= 11,5 + 10 \operatorname{sen} \left( \frac{-26 \times \pi}{12} \right) \rightarrow 180^\circ \\ &= 11,5 + 10 \operatorname{sen} (-330) \\ &= 11,5 + 10 \times (-0,5) \\ &= 11,5 + (-5) \\ &= 6,5 \end{aligned}$$

Grupo 4

$$\begin{aligned} h(t) &= 11,5 + 10 \operatorname{sen} \left[ \frac{\pi}{12} (t - 26) \right] \\ h(0) &= 11,5 + 10 \cdot \operatorname{sen} \left[ \frac{\pi}{12} (0 - 26) \right] \\ &= 11,5 + 10 \cdot \operatorname{sen} \left[ \frac{\pi}{12} \times (-26) \right] \\ &= 11,5 + 10 \times (-0,5) \\ &= 6,5 \end{aligned}$$

Fig. 4.13: Resoluções da alínea a da atividade 3 pelos grupos 2 e 4

A Figura 4.14 ilustra as resoluções da alínea b) dos grupos para determinar as alturas mínima e máxima que o professor alcança.

b) Determina as alturas mínima e máxima que professor alcança e o tempo gasto em uma volta completa.

Grupo 2

$$\begin{aligned} \text{b) } -1 &\leq \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{12} (t - 26) \right) \rightarrow \text{mult. por } 10 \\ \frac{-1}{(\times 10)} &\leq \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{12} (t - 26) \right) \leq \frac{1}{(\times 10)} \\ -10 &\leq \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{12} (t - 26) \right) \leq 10 \rightarrow \text{seman por } 11,5 \\ \frac{-10}{(+11,5)} & \quad \quad \quad \frac{10}{(+11,5)} \\ 1,5 &\leq \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{12} (t - 26) \right) \leq 21,5 \\ \text{min} & \quad \quad \quad \text{max} \end{aligned}$$

Grupo 4

$$\begin{aligned} \text{b) } h(t) &= 11,5 + 10 \operatorname{sen} \left[ \frac{\pi}{12} (t - 26) \right] \\ -1 &\leq \operatorname{sen} \left[ \frac{\pi}{12} (t - 26) \right] \leq 1 \\ -10 &\leq 10 \operatorname{sen} \left[ \frac{\pi}{12} (t - 26) \right] \leq 10 \\ 1,5 &\leq 11,5 + 10 \operatorname{sen} \left[ \frac{\pi}{12} (t - 26) \right] \leq 21 \end{aligned}$$

Fig. 4.14: Resoluções da alínea b da atividade 3 pelos grupos 2 e 4

De acordo com as resoluções apresentadas na Figura 4.14 o valor máximo da função do grupo 4 está errado, porque 21 metros não corresponde à altura máxima que o professor pode atingir, mas sim 21,5 metros .

A Figura 4.15 ilustra as resoluções da alínea c) dos grupo 3 e grupo 4 para determinar o tempo gasto em uma volta completa.

c) Qual é o tempo gasto em uma volta completa (período) e o que ele representa em termos das alturas?

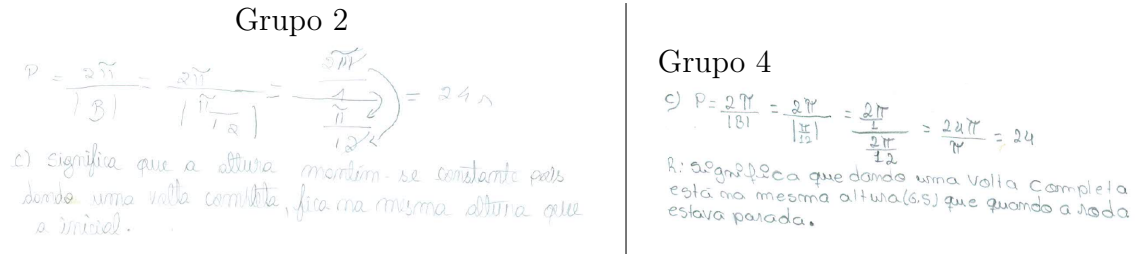


Fig. 4.15: Resoluções da alínea c da atividade 3 pelos grupos 2 e 4

Com as respostas dos grupos verifica-se que o conceito de período e o seu significado em relação a esse problema foram bem esclarecidos.

d) Usa o GeoGebra e descreve o que acontece quando se altere o valor de cada um dos parâmetros da expressão da função  $(h(t) = a + b \sin\left[\frac{\pi}{c}(t - d)\right], c \neq 0)$ .

Resolução do problema usando o GeoGebra e concretização dos parâmetros obtendo a função

$$h(t) = 11,5 + 10 \sin\left[\frac{\pi}{12}(t - 26)\right], (h(t) = a + b \sin\left[\frac{\pi}{c}(t - d)\right], c \neq 0)$$

A Figura 4.16 ilustra os gráficos das funções dos grupo 3 e grupo 4:

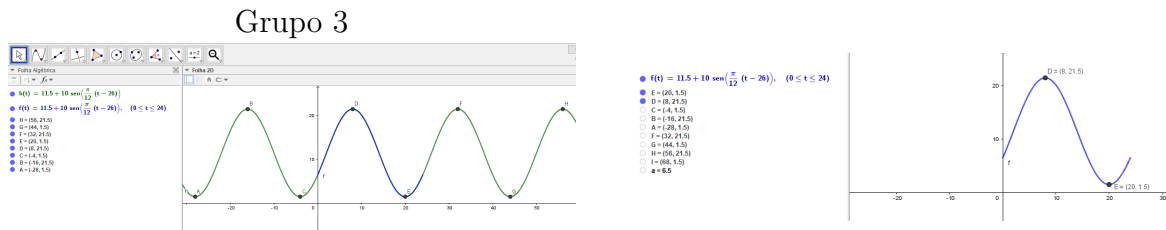


Fig. 4.16: Resoluções da alínea d da atividade 3 pelos grupos 3 e 4

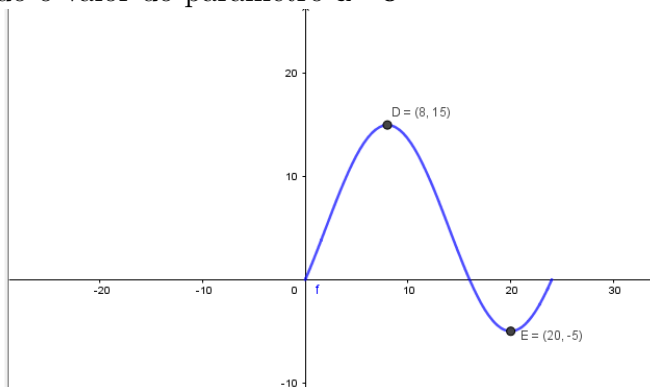
Com os gráficos os alunos conseguiram comparar os resultados das questões resolvidas analiticamente com os resultados obtidos através dos gráficos. A partir deste momento ficaram entusiasmados e motivados em trabalhar no GeoGebra.

### Manipulações dos parâmetros

- parâmetro **a**  
Grupo 3

Diminuindo o valor do parâmetro **a = 5**

- $f(t) = 5 + 10 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12}(t - 26)\right)$ ,  $(0 \leq t \leq 24)$
- E = (20, -5)
- D = (8, 15)
- C = (-4, -5)
- B = (-16, 15)
- A = (-28, -5)
- F = (32, 15)
- G = (44, -5)
- H = (56, 15)
- I = (68, -5)
- a = 0



Aumentando o valor do parâmetro **a = 14**

- $f(t) = 14 + 10 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12}(t - 26)\right)$ ,  $(0 \leq t \leq 24)$
- E = (20, 4)
- D = (8, 24)
- C = (-4, 4)
- B = (-16, 24)
- A = (-28, 4)
- F = (32, 24)
- G = (44, 4)
- H = (56, 24)
- I = (68, 4)
- a = 9

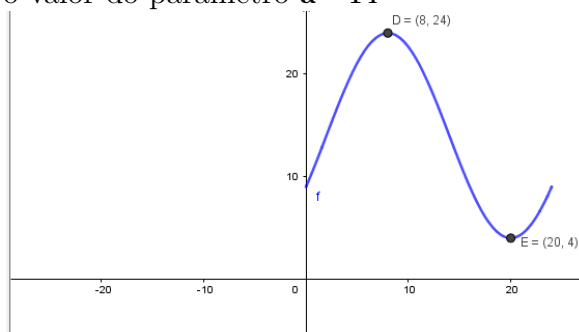


Fig. 4.17: Alteração de valor do parâmetro **a** da atividade 3 pelo grupo 3

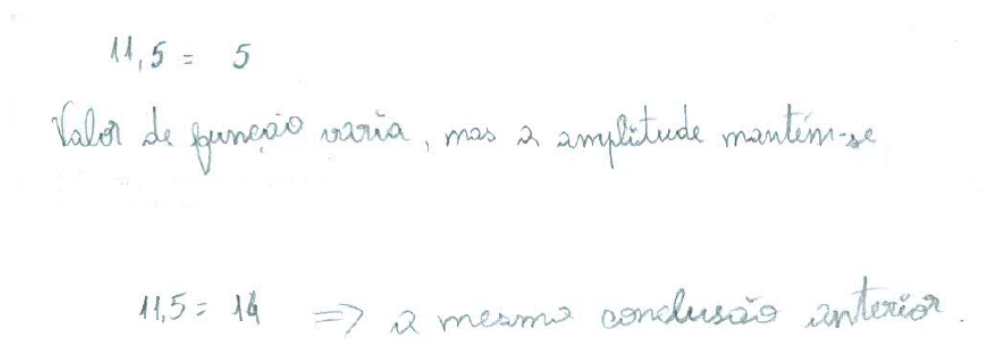


Fig. 4.18: Análise sobre parâmetro **a** da atividade 3 pelo grupo 3

Grupo 4

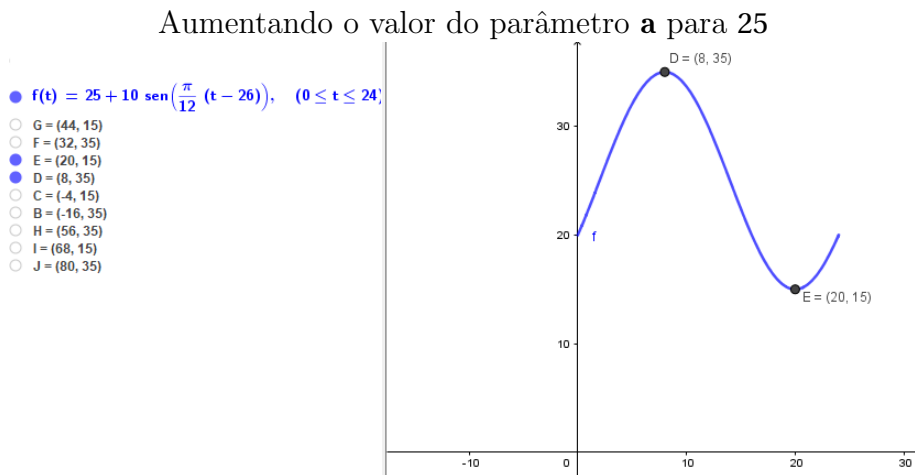
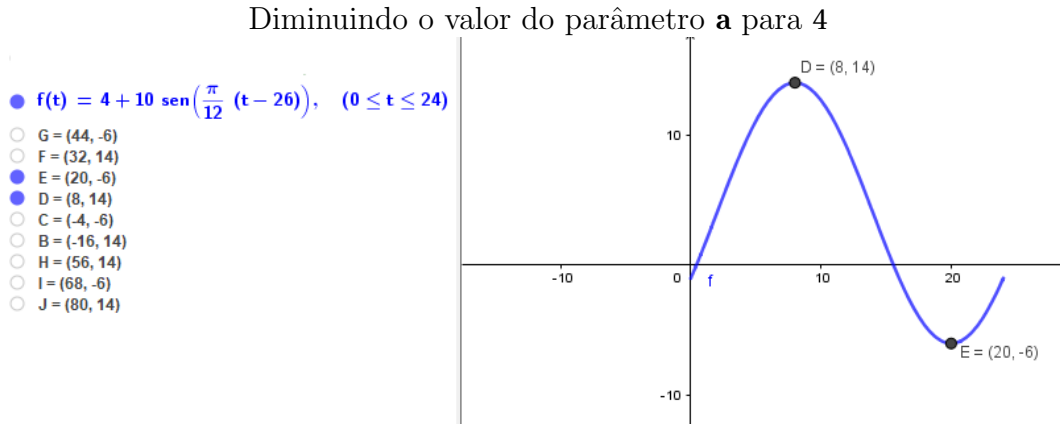


Fig. 4.19: Alteração de valor do parâmetro **a** da atividade 3 pelo grupo 4

11,5 | 14  
11,5 | 25

A conclusão quando altera o valor de 11,5 a função altera a amplitude mantém constante

Fig. 4.20: Análise sobre parâmetro **a** da atividade 3 pelo grupo 3

Os grupos chegaram à mesma conclusão, ou seja, alterando o valor do parâmetro **a**, os valores da função alteram, mas o valor da amplitude mantém-se.

- parâmetro **b**  
Grupo 3

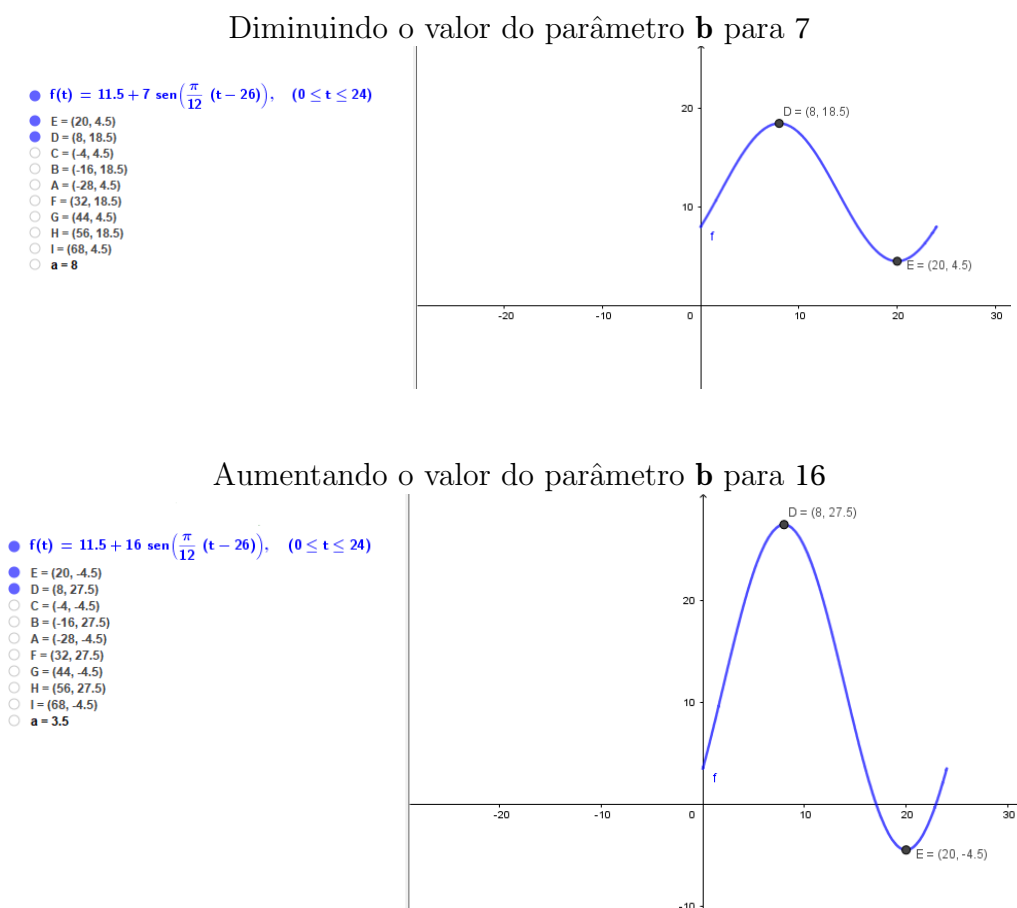


Fig. 4.21: Alteração de valor do parâmetro **b** da atividade 3 pelo grupo 3

10 = 7

Varia o valor da função e varia o valor da amplitude

10 = 16  $\Rightarrow$  mesma conclusão

Fig. 4.22: Análise sobre parâmetro **b** da atividade 3 pelo grupo 3

Grupo 4

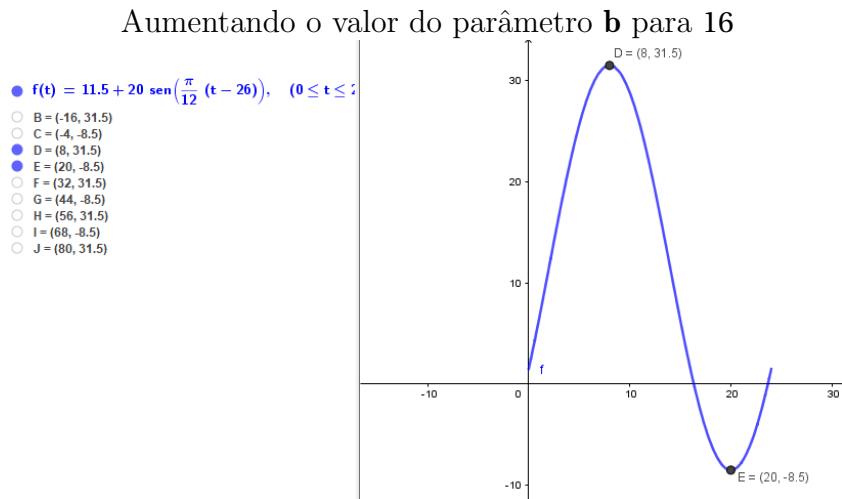
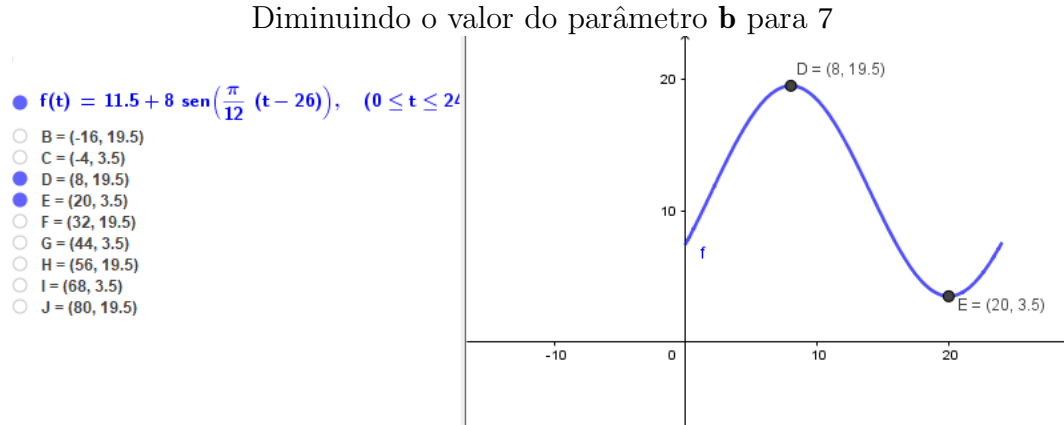


Fig. 4.23: Alteração de valor do parâmetro **b** da atividade 3 pelo grupo 4

RRfero  
 8 | 10  
 20 | 10

quando altera o  
 valor de 10 a amplitude  
 altera a função também

Fig. 4.24: Análise sobre parâmetro **b** da atividade 3 pelo grupo 4

Com a alteração do valor do parâmetro **b**, os grupos chegaram à mesma conclusão, que, alteram os valores na função também altera o valor da amplitude da função, ou seja, diminuindo o valor do parâmetro a amplitude diminui e aumentando o valor do parâmetro também a amplitude aumenta.

- parâmetro  $c$

Grupo 3 e grupo 4

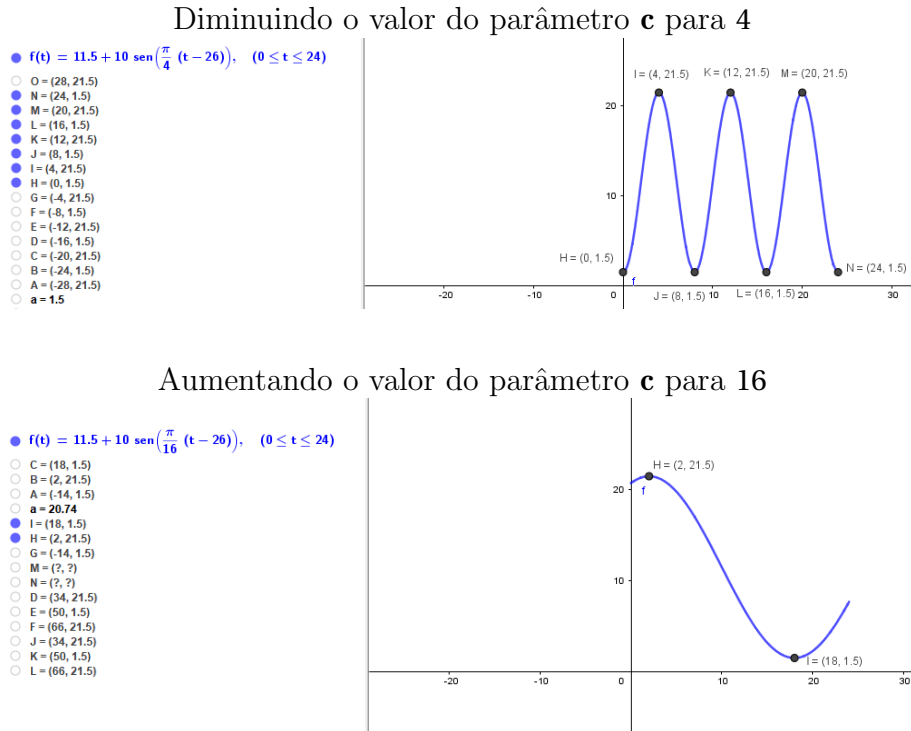


Fig. 4.25: Alteração de valor do parâmetro  $c$  da atividade 3 pelo grupo 3

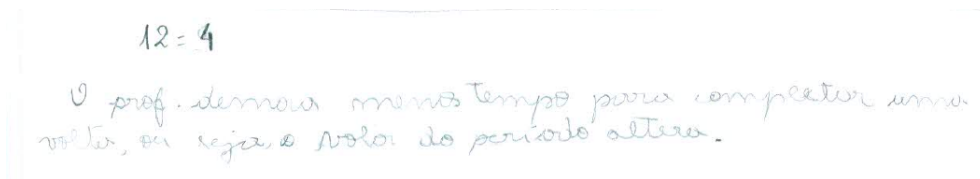


Fig. 4.26: Análise do parâmetro  $c$  da atividade 3 pelo grupo 3

$$\left(\frac{\pi}{4}(t-26)\right)$$

$$\left(\frac{\pi}{16}(t-26)\right)$$

quando altera o valor de 12 o período altera.

Fig. 4.27: Análise do parâmetro  $c$  da atividade 3 pelo grupo 4

O parâmetro  $c$  interfere no período da função.

### 4.6.2 Conclusão da atividade 3

Analisando as resoluções ilustrados na Figura 4.13, percebe-se que os alunos interpretaram corretamente o problema, mas as respostas que foram dadas oralmente na sala não constam da resolução. Também se percebe que os grupos não colocaram a unidade no resultado encontrado.

O Geogebra foi muito importante na execução desta atividade pois facilitou muito a compreensão dos resultados obtidos algebricamente. Foi uma aula dinâmica principalmente na concretização dos parâmetros, uma vez que os alunos analisaram o que acontece quando se altera o valor de cada parâmetro. Os alunos ficaram entusiasmados com o software Geogebra, o que tornou a aula muito mais dinâmica. O facto de serem os alunos a manipular a função, visualizando as alterações produzidas no gráfico, tornou a aprendizagem deste conteúdo mais sólida.

## 4.7 Atividade 4

A atividade 4 (ver Apêndice A.4) refere-se às marés, alta e baixa, isto é, movimento periódico de subida e descida das águas do mar numa das praias em Cabo Verde. Nesta atividade os alunos tinham que determinar as alturas da maré alta e da maré baixa, bem como o momento em que ocorre cada uma das marés. Com esta atividade pretende-se que os alunos compreendam o conceito da função cosseno numa situação concreta, respondendo a questões sobre as quais têm que refletir para proceder a uma resolução algébrica. Num segundo momento recorreremos ao software GeoGebra para implementar (implementação em conjunto) a função e comparar com os resultados algébricos obtidos. Nesta fase da atividade a orientação do professor foi ainda necessária.

A atividade apresenta os seguintes objetivos:

- Reconhecer o uso de funções trigonométricas para a referida situação-problema;
- Reconhecer o uso de equações trigonométricas para a referida situação-problema;
- Aplicar a definição de função do tipo cosseno a partir da situação proposta;
- Introduzir a definição de cada parâmetro e suas influências em funções do tipo  $(a + b \cdot \cos(\frac{\pi}{c} \cdot t), c \neq 0)$ ;
- Relacionar a interpretação algébrica com a interpretação geométrica;
- Interpretar os resultados obtidos, ou seja, o que eles representam.

Na resolução da atividade 4 os alunos estavam melhor capacitados em termos dos conceitos sobre funções trigonométricas, tendo em conta que já os tinham abordado na atividade 3. Os alunos mostraram maior capacidade na resolução da atividade e na interpretação dos resultados.



Fig. 4.28: Maré no mar da prainha

As imagens apresentadas na Figura 4.29 ilustram momentos da realização da atividade 4:



Fig. 4.29: Realização da atividade 4

A Figura 4.30 ilustra as resoluções da alínea b) dos grupos 1 e 5 para determinar a altura da água na maré alta.

b) Qual era a altura da água na maré alta?

Grupo 1

$$\begin{aligned} \text{b) } y &= 5 + 4,9 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) \\ (-1 \leq \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) \leq 1) \times 4,9 \\ (-4,9 \leq 4,9 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) \leq 4,9) + 5 \\ 0,1 &\leq 9,9 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) \leq 9,9 \\ R &= \text{A altura da água na maré alta é } 9,9 \text{ metros.} \end{aligned}$$

Grupo 5

$$y = 5 + 4,3 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$$

$$-1 \leq \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) \leq 1$$

$$-4,3 \leq 4,3 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) \leq 4,3$$

$$0,1 \leq 5 + 4,3 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) \leq 9,3$$

↳ a maré alta a altura da água é 9,3 m

Fig. 4.30: Resoluções da alínea b da atividade 4 pelos grupos 1 e 5

Nesta atividade verifica-se que os alunos foram capazes de compreender o enunciado e interpretar corretamente o problema, utilizando o conceito de máximo e mínimo da função trigonométrica cosseno para resolver a questão. É de observar que nesta atividade os grupos apresentaram as respostas finais em todas as questões, bem como as unidades em relação aos resultados, isso foi devido à chamada de atenção relativamente às atividades anteriores.

As Figuras 4.31 e 4.32 ilustram as resoluções da alínea c) do grupo 1 e do grupo 5.

c) Quando foi a maré baixa e qual era a altura da água nesse momento?

Grupo 1

$$c) \quad 5 + 4,3 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) = 0,1$$

$$= 4,3 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) = 0,1 - 5$$

$$= 4,3 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) = -4,3$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) = \frac{-4,3}{4,3}$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) = -1$$

$$\frac{\pi}{6}t = \pi + 2k\pi$$

$$t = \frac{\pi}{\frac{\pi}{6}} + \frac{2k\pi}{\frac{\pi}{6}}$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) = \cos \pi$$

$$\Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi$$

$$x = -\pi + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) = \cos \pi$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{6}t = \pi + 2k\pi \vee \frac{\pi}{6}t = -\pi + 2k\pi$$

$$\frac{\pi}{6}t = -\pi + 2k\pi$$

$$t = \frac{-\pi}{\frac{\pi}{6}} + \frac{2k\pi}{\frac{\pi}{6}}$$

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\pi}}{6} t &= \tilde{\pi} + 2k\tilde{\pi} & \frac{\tilde{\pi}}{6} t &= -\tilde{\pi} + 2k\tilde{\pi} \\ T &= \frac{\tilde{\pi}}{\frac{\tilde{\pi}}{6}} + \frac{2k\tilde{\pi}}{\frac{\tilde{\pi}}{6}} & t &= \frac{-\tilde{\pi}}{\frac{\tilde{\pi}}{6}} + \frac{2k\tilde{\pi}}{\frac{\tilde{\pi}}{6}} \\ &= 6 + 12k, k \in \mathbb{Z} & t &= -6 + 12k, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T &= 6 + 12k & \vee & T = -6 + 12k \\ &6 + 12 \times 0 & &-6 + 12 \times 0 \\ k=0 &\rightarrow T = 6 \text{ h} & \vee & T = -6 \text{ h} \\ &6 + 12 \times 1 & &-6 + 12 \times 1 \\ k=1 &\rightarrow T = 18 \text{ h} & \vee & T = 6 \text{ h} \\ &6 + 12 \times 2 & &-6 + 12 \times 2 \\ k=2 &\rightarrow T = 30 \text{ h} & \vee & T = 18 \text{ h} \end{aligned}$$

Nota: há uma outra solução com 24h e 12h = o momento da maré baixa do dia 0,1000

Fig. 4.31: Resolução da alínea c da atividade 4 pelo grupo 1

Grupo 5

$$\begin{aligned} \text{c) } y &= 5 + 4,9 \cos\left(\frac{\pi}{6} t\right) = 0,1 \\ 5 + 4,9 \cos\left(\frac{\pi}{6} t\right) &= 0,1 \\ 4,9 \cos\left(\frac{\pi}{6} t\right) &= 0,1 - 5 \\ 4,9 \cos\left(\frac{\pi}{6} t\right) &= -4,9 \\ \cos\left(\frac{\pi}{6} t\right) &= -\frac{4,9}{4,9} \\ \cos\left(\frac{\pi}{6} t\right) &= -1 \\ \cos\left(\frac{\pi}{6} t\right) &= \cos \pi \\ \left(\frac{\pi}{6} t\right) &= \pi + 2k\pi \quad \vee \quad \left(\frac{\pi}{6} t\right) = -\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow T &= \frac{\pi}{\frac{\pi}{6}} + \frac{2k\pi}{\frac{\pi}{6}} \quad \vee \quad T = -\frac{\pi}{\frac{\pi}{6}} + \frac{2k\pi}{\frac{\pi}{6}}, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow T &= 6 + 12K & \vee & T = -6 + 12K, K \in \mathbb{Z} \\ K=0 \Leftrightarrow T &= 6 + 0 & \vee & T = -6 + 0 \\ & T = 6h & \vee & T = -6x \\ K=1 \Leftrightarrow T &= 6 + 12 & \vee & T = -6 + 12 \\ & T = 18h & \vee & T = 6h \\ K=2 \Leftrightarrow T &= 6 + 24 & \vee & T = -6 + 24 \\ & = 30hx & \vee & T = -18 \end{aligned}$$

R = Em 24 h acontece maré baixa 6h e 18h e a altura da água nesses momentos é 0,1 metros.

Fig. 4.32: Resolução da alínea c da atividade 4 pelo grupo 5

Fazendo a análise das respostas dadas pelos grupos, ilustradas na Figura 4.31 e na Figura 4.32, pode perceber-se que os alunos interpretaram corretamente a questão, usaram os conhecimentos em relação ao conteúdo que envolviam o uso das equações trigonométricas para determinar os momentos de maré baixa e a altura da água nesses momentos. A Figura 4.33 ilustra as resoluções da alínea d) de grupo 1 e grupo 5.

d) Qual é o período desta função e o que ele representa em termos das marés?

Grupo 1

$$d) P = \frac{2\pi}{181} \Leftrightarrow \frac{2\pi}{\frac{1}{91}} = \frac{182\pi}{\pi} = 182h$$

Significa que em 12 em 12h temos maré baixa e em 12 em 12h temos maré baixa

Grupo 5

$$P = \frac{12\pi}{\pi}$$

$$P = 12h$$

R = O período é 12 h. Em cada 12h a maré é baixa ou a maré é alta.

Fig. 4.33: Resoluções da alínea d da atividade 4 pelos grupos 1 e 5

As Figura 4.34 ilustra as resoluções da alínea e) de grupo 1 e grupo 5.

e) Qual é a amplitude desta função e o que ela representa em termos das marés?

Grupo 1

e)  $A = |4,9|$   
 $= 4,9 \text{ m}$   
 Neste caso amplitude significa a distância entre linha média e um dos extremos da função e é de 4,9 m

Grupo 5

e) Amplitude =  $|4,9| = 4,9$   
 $R = A$  amplitude e 4,9 metros e representa a distância entre a linha média e os marés (extremos).

Fig. 4.34: Resoluções da alínea e da atividade 4 pelos grupos 1 e 5

Na resolução da Questão e) é notório que os alunos usaram os conhecimentos da atividade anterior em relação ao estudo dos parâmetros da função e o seus significados para a questão em causa, isto é, determinar a amplitude da função e o que ela representa em termos das marés.

As Figuras seguintes ilustram as resoluções em conjunto com a turma toda das questões a) e f). Esboçámos os gráficos e gerámos as tabelas com valores de 0 a 24 segundos a partir de software GeoGebra, de seguida analisámos oralmente cada uma das situações, mais concretamente as mudanças no gráfico quando se alterámos o valor de cada um dos parâmetros ( $h(t) = a + b \cdot \cos\left(\frac{\pi}{c} \cdot t\right)$ ,  $c \neq 0$ ).

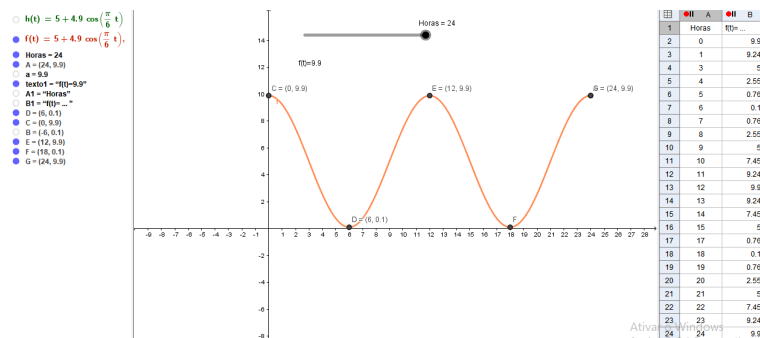


Fig. 4.35: Função inicial

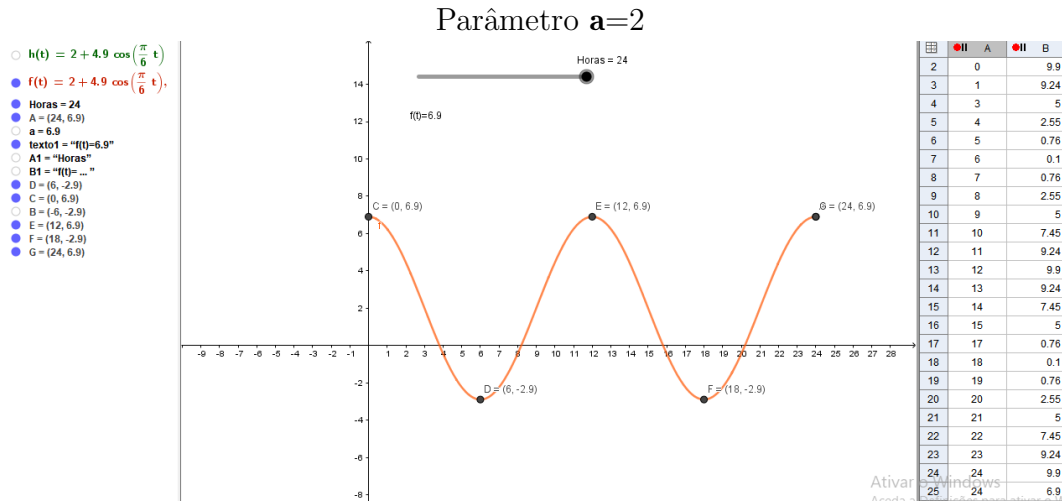


Fig. 4.36: Alteração de valor do parâmetro **a** da atividade 4

Com alteração do parâmetro **a** o gráfico descola na direção do eixo de  $Oy$ . Se diminuirmos o valor do parâmetro **a**, o gráfico translada verticalmente para baixo e se aumentarmos o valor do parâmetro **a**, o gráfico translada verticalmente para cima.

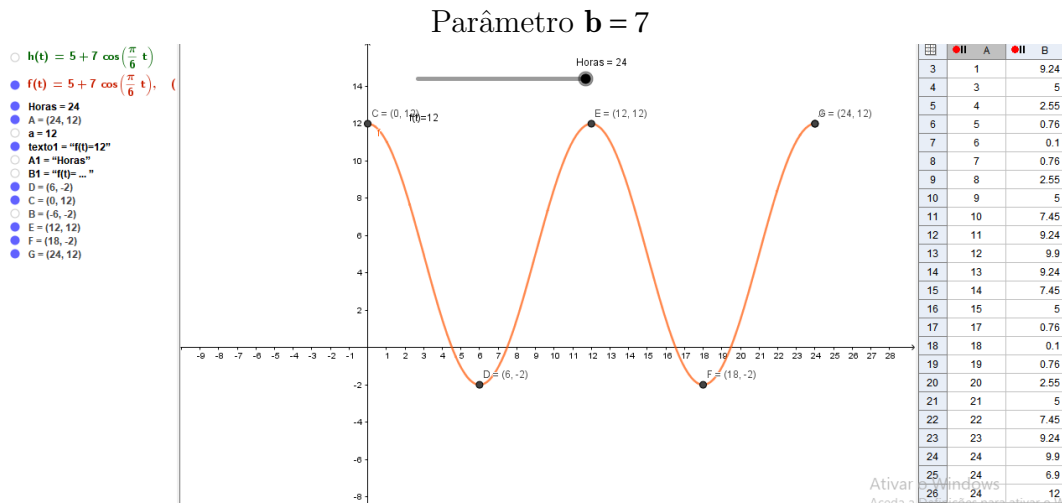


Fig. 4.37: Alteração de valor do parâmetro **b** da atividade 4

Alterando o valor do parâmetro **b** eltera a amplitude do gráfico. Se diminuirmos o valor do parâmetro **b**, o gráfico comprime verticalmente e se aumentarmos o valor do parâmetro **b**, o gráfico amplia verticalmente.

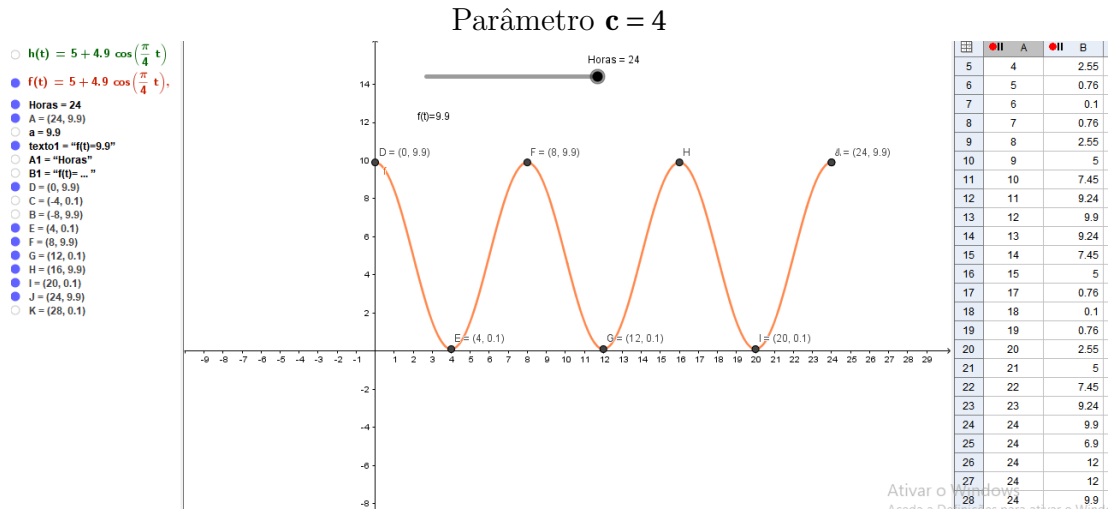


Fig. 4.38: Alteração de valor do parâmetro  $c$  da atividade 4

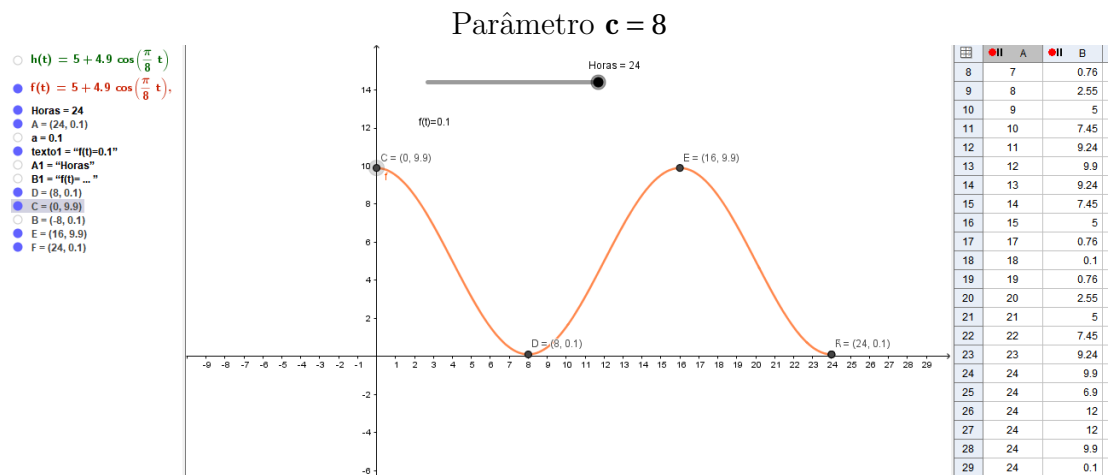


Fig. 4.39: Alteração de valor do parâmetro  $c$  da atividade 4

O parâmetro  $c$  interfere no período da função. Se diminuirmos o valor do parâmetro  $c$ , aumenta o período e se aumentarmos o valor do parâmetro  $c$ , diminui o período.

### 4.7.1 Conclusão da atividade 4

Na resolução da atividade 4 os alunos estavam melhor capacitados em termos dos conceitos sobre funções trigonométricas, tendo em conta que já os tinham abordado na atividade 3. Os alunos mostraram maior capacidade na resolução da atividade e na interpretação dos resultados. Nesta atividade é de constatar algum rigor no uso dos sinais (o sinal = e o

sinal  $\Leftrightarrow$ ) e na apresentação de resposta. Esta melhoria advém da chamada de atenção do professor na realização das atividades anteriores.

Com a realização das atividades os alunos perceberam as diversas aplicabilidades dos conceitos trigonométricos no seu cotidiano, o que pode potenciar a sua motivação a estudar e aprender de maneira significativa os conteúdos que são trabalhados na sala de aulas. Da minha observação feita durante a realização das atividades em grupo percebi que esta dinâmica possibilitou que os alunos interagissem entre eles, trocassem ideias e tirassem dúvidas uns aos outros, de forma a elaborar estratégias para resolver os problemas propostos nas atividades. Os alunos não conheciam o GeoGebra, mas como possuem habilidades na utilização de tecnologias, foi relativamente simples implementar as atividades no GeoGebra.

Os alunos tiveram uma participação ativa em todo o processo que decorreu durante estas aulas, tendo trabalhado colaborativamente nas resoluções das atividades. É de constatar o entusiasmo dos alunos com esta forma de abordagem dos conteúdos na disciplina de Matemática. A dinâmica das aulas, a interação entre pares, e o evoluir dos alunos ao longo deste período de implementação da experiência, permite afirmar que os objetivos e expectativas do professor foram superados.

## 4.8 Perceção dos alunos sobre as atividades realizadas

Terminadas as aulas e a aplicação das atividades de avaliação do conteúdo, elaborou-se um questionário que se encontra no apêndice A.5, com várias questões relacionados com as atividades realizadas na sala de aula, nas duas turmas, de forma a verificar se as experiências de aprendizagem significativa envolvendo metodologias ativas e estratégias dinâmicas em tópicos de Trigonometria no Ensino Secundário desenvolvidas facilitaram no processo de ensino e aprendizagem.

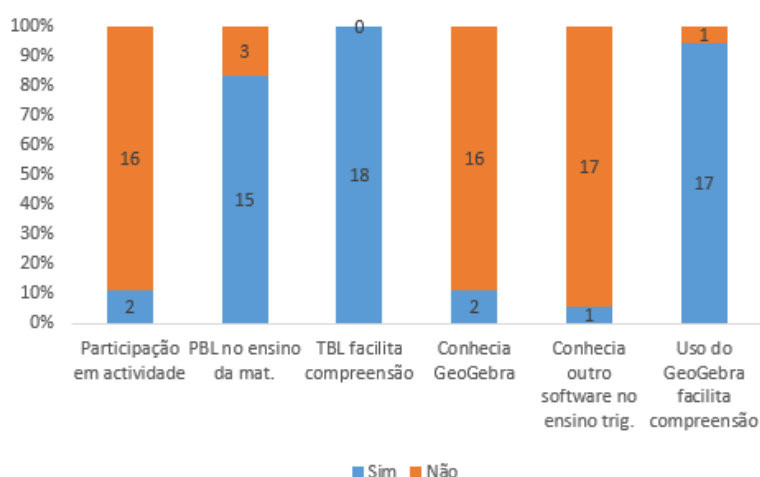


Fig. 4.40: Opinião dos alunos sobre as atividades realizadas

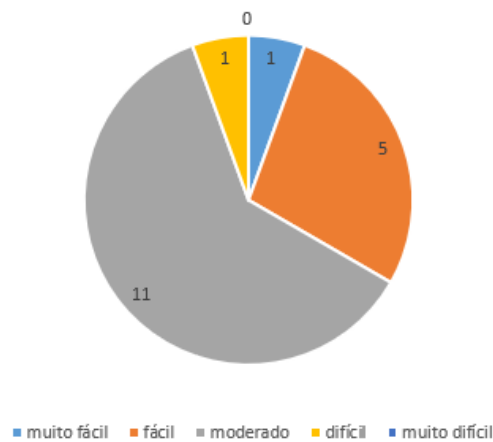


Fig. 4.41: Opinião dos alunos sobre o nível de dificuldade das atividades

Responderam ao questionário 18 alunos, desses, 16 referem que nunca participaram em atividades, contudo, 15 considera que o ensino de Matemática baseado em problemas concretos facilita a compreensão dos conteúdos.

A totalidade dos alunos que considera que a atividade em equipa facilita a compreensão e, em relação à questão, "Na sua opinião, qual o nível de dificuldade das atividades realizadas durante a aula" só 1 aluno considerou difícil.

No que diz respeito ao software, 16 dos alunos responderam que não conheciam o Geogebra e 17 não conhecia outros softwares utilizados no ensino da trigonometria.

Através das respostas dos alunos, podemos concluir que o objetivo foi alcançado com êxito, relatam que ao participarem nas atividades, em equipas e com o auxílio do GeoGebra, permitiu-lhes compreenderem melhor os conceitos trigonométricos e adquirir a habilidade de resolver problemas do cotidiano.

## Conclusão

Com a realização deste trabalho, verificamos que é muito importante a implementação das novas metodologias ativas no ensino e aprendizagem na disciplina de matemática, de modo a tornar o ensino mais atraente, dinâmico e significativo para os alunos. A aprendizagem baseada em problemas (PBL) permite que os alunos percebam as aplicabilidades dos conceitos matemáticos nas várias áreas no seu cotidiano, tornando o seu estudo e aprendizagem mais significativas na sala de aula.

Durante a realização das atividades também foi possível observar o desenvolvimento de uma maior compreensão sobre o tema, maior retenção de conhecimentos, o despertar para a importância da interdisciplinaridade, sempre tendo por foco, a resolução de um problema.

Com este trabalho foi possível verificar a importância do uso de software GeoGebra no processo de ensino e aprendizagem da trigonometria. Os alunos não tiveram muitas dificuldades no seu uso na sala de aula, mesmo sendo, o primeiro contato com essa ferramenta. Na fase de alterações dos parâmetros é de verificar certa motivação e dinâmica por parte dos alunos na forma de análise, interpretação e conclusão dos resultados.

Analisando as resoluções das questões de todos os grupos é de constatar que há falta de rigor nas notações matemáticas e praticamente ausência das respostas finais. Deste modo é pertinente o papel dos professores para ultrapassar estas lacunas. Ou seja, primeiro nós professores temos que ser exigentes conosco mesmos e depois exigir aos alunos a fazer o mesmo.

Pelas manifestações dos alunos durante a experiência e pelos questionários aplicados aos alunos nas turmas onde foram realizadas as experiências, podemos concluir que a aprendizagem baseada no problema, aprendizagem baseada na equipa e utilização do GeoGebra no ensino da trigonometria podem facilitar o processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos, ou seja, torna as abordagens dos conteúdos mais contextualizadas, dinâmicas, participativas e mais produtivas. Os alunos, praticamente na sua totalidade, reconhecem a importância da implementação de metodologias ativas no ensino. Também é unânime que a aprendizagem baseada em equipa contribui de forma significativa no processo de ensino-aprendizagem.

Tivemos alguns constrangimentos na realização das atividades, tendo em conta que foi no final do terceiro trimestre e final do ano letivo. Mas com a colaboração dos alunos encontramos uma saída para a realização das atividades que foi no período contrário ao das aulas e nos dias em que eles não ficavam prejudicados em relação à preparação para as provas agendadas para aquela altura.

Por causa do fator tempo, em que ano letivo 2020/2021 foi um ano atípico devido as medidas que o ministério da educação tomou em relação ao funcionamento das aulas por causa da pandemia COVID 19, isto é, o número das aulas reduziu 50% em relação ao funcionamento normal, conseqüentemente as planificações dos conteúdos sofrerem alterações, por isso tivemos dificuldade em aplicar todos os procedimentos em alguma fase de Aprendizagem Baseada em Equipas (TBL).

Obviamente, as práticas baseadas em problemas exigem momentos de reflexão para a melhoria da didática frente às dificuldades apresentadas, e constante autoavaliação e replaneamento; além de habilidade comunicativa, exercício de liderança, e observação de aspectos referentes à interdisciplinaridade dos conteúdos envolvidos e a complexidade dos indivíduos, sujeitos dos casos, exigindo sensibilização, motivação e participação docente, discente e institucional. Não é um caminho fácil, mas, certamente, é recompensador, já que estudar passa a ser um ato desafiador e motivador.

Portanto, é pertinente refletir sobre a importância das metodologias ativas para o ensino da matemática, de modo a facilitar a compreensão dos conteúdos de forma significativa e ultrapassar a aprendizagem da matemática por um processo mecânica.

Esperamos que essa proposta de ensino e aprendizagem seja utilizada por parte dos professores de matemática nas suas aulas.

# Bibliografia

- Akcay, B. (2009). Problem-based learning in science education. *Journal of Turkish Science Education*, 6.
- Almeida Costa, F. and Allevato, N. S. G. (2019). Estudo das funções trigonométricas a partir da teoria da aprendizagem significativa. *Revemop*, 1(1):126–142.
- Augusta F. Neves, Luísa Brito. (1995) Matemática 9 (1ª edição). Porto Editora.
- Ausubel, David P. (1980) Schemata, cognitive structure, and advance organizers: A reply to anderson, spiro, and anderson *Jornal americano de pesquisa educacional*, pages 400–404 Sage Publications Sage CA: Los Angeles, CA 17.
- Ausubel, D. P. (1982). A aprendizagem significativa. *São Paulo: Moraes*.
- Barrows, Howard S e Tamblyn, Robyn M. (1980) Aprendizagem baseada em problemas: uma abordagem à educação médica. *Springer Publishing Company*
- Barrows, Howard. (2002). É realmente possível ter algo como dPBL. *Educação a Distância*, 119–122. Taylor Francis.
- Bogdan, R. and Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto Editora.
- Bonwell, C. C. and Eison, J. A. (1991). Active learning: Creating excitement in the classroom. *ASHE-ERIC Higher Education, Report Washington, DC: School of Education and Human DEvelopment, George Washington Univ.*
- Bordin, D. (2019). Ueps: aprendizagem significativa da trigonometria aplicada ao futebol. *Universidade de Caxias do Sul*.
- Boyer, C. B. and Merzbach, U. C. (2019). *História da matemática*. Editora Blucher.
- De Brito, Crisolita Sousa and da Luz, Dirce Henriques and Duarte, João Emanuel Almeida. (2018). Estudo da Trigonometria no 11º Ano Com Recurso ao Software GeoGebra. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo*.

- Carotenuto, F. M. and Pereira, O. J. (2020). Professores, metodologias ativas e a EAD: uma proposta prática da inversão da sala de aula utilizando a Pirâmide de William Glasser. *Conferência: 26<sup>o</sup> CIAED Congresso Internacional ABED de Educação a Distância*.
- Chickering, A. W. and Gamson, Z. F. (1987). Seven principles for good practice in undergraduate education. *AAHE bulletin*, 3:7.
- Costa, N. M. L. (2003). A história da trigonometria. *Educação Matemática em Revista-Revista da SBEM*, (10), pages 60–68.
- Costa, F. d. A. et al. (2017). O ensino de funções trigonométricas com o uso da modelagem matemática sob a perspectiva da teoria da aprendizagem significativa. *Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologias, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo*.
- Cukierman, U., Arnal, P., Cerasulo, P., Esperon, G., Fuertes, B., Agüero, M., Urdaneta, R., Ibañez, L., and Badaro, S. (2014). Playing with maths: Geogebra application for meaningful education. In *International Conference on Interactive Collaborative Learning (ICL)*, pages 243–248. IEEE.
- Dos Santos, José Manuel Dos Santos and Silveira, Astrigilda Pires Rocha and da Silva Trocado, Alexandre Emanuel Batista. Formação de formadores em GeoGebra para Cabo Verde, 2016-2017?Tarefas e resultados. In *Organização de Estados Ibero-Americanos para a Educação a Ciência e a ?*
- Ezhilarasi, L., Sripriya, K., Suganya, A., and Vinodhini, K. (2017). A system for monitoring air and sound pollution using arduino controller with iot technology. *International Research Journal in Advanced Engineering and Technology*, 3(2):1781–1785.
- Faust, J. L. and Paulson, D. R. (1998). Active learning in the college classroom. *Journal on excellence in college teaching*, 9(2):3–24.
- Feijó, R. S. A. A. (2018). Dificuldades e obstáculos no aprendizado de trigonometria: um estudo com alunos do ensino médio do distrito federal. *Universidade de Brasília, Brasília*
- Fonseca, L. S. d. et al. (2011). A aprendizagem das funções trigonométricas na perspectiva da teoria das situações didáticas. *Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão*
- Hohenwarter, (2009). Linking geometry, algebra, and mathematics teachers: Geogebra software and the establishment of the international geogebra institute. In *International Journal for Technology in Mathematics Education* 16(2):83-8716.
- Hrynchak, P. and Batty, H. (2012). The educational theory basis of team-based learning. *Medicina (Ribeirão Preto)* 2014;47(3):293-300 <http://revista.fmrp.usp.br/>.
- Hsieh, C. (2013). Active learning: Review of evidence and examples. In *ISBS-Conference Proceedings Archive*.

- Iezzi, G., Murakami, C., Hazzan, S., and Dolce, O. (1995). Fundamentos de matemática elementar. *Atual Editor LTDA*.
- Kartikasari, (2017). A eficácia da abordagem de aprendizagem baseada em problemas com base em inteligências múltiplas em termos de desempenho do aluno, capacidade de conexão matemática e auto-estima. In *Journal of Physics: Conference Series*, volume 812.
- Klein (2015) Ensino de trigonometria com base na teoria da aprendizagem significativa e na teoria do campo conceitual. In *CERME 9-Nono Congresso da Sociedade Europeia de Pesquisa em Educação Matemática*.
- Limberger, Jane Beatriz. (2013). Metodologias ativas de ensino-aprendizagem para educação farmacêutica: um relato de experiência, 17, pages 969–975. *Interface-Comunicação, Saúde, Educação*. SciELO Brasil.
- Lopes, M. M. (2013). Sequência didática para o ensino de trigonometria usando o software geogebra. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 27(46):631–644.
- Lopes, R. M., Alves, N. G., Pierini, M. F., and Silva Filho, M. V. (2019). Características gerais da aprendizagem baseada em problemas. *Aprendizagem baseada em problemas: fundamentos para a aplicação no ensino médio e na formação de professores (pp. 47-74)* Lopes, R. M., Filho, M. V. S., Alves, N. G. (Ed.),
- Masitoh, L. F. and Fitriyani, H. (2018). Improving students mathematics self-efficacy through problem based learning. *Malikussaleh Journal of Mathematics Learning (MJML)*, 1(1):26–30.
- Mathias, Carmen V and da Silva, Hilário Alencar and Leivas, José Carlos Pinto. (2019) Provas sem palavras, visualização, animação e GeoGebra, 8(1) 62–77. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo*
- Michaelsen, Larry K e Watson, Warren e Cragin, John P e Dee Fink, L (1982) Aprendizagem em equipe: uma solução potencial para os problemas de turmas grandes, 13–22. *Exchange: The Organizational Behavior Teaching Journal* Thousand Oaks, CA
- Michaelsen, Larry K e Sweet, Michael. (2008). Os elementos essenciais da aprendizagem baseada em equipe, 7–27. *Novas direções para ensino e aprendizagem*. Wiley Online Library.
- Michaelsen, Larry K e Davidson, Neil e Major, Claire Howell. (2014). Práticas e princípios de aprendizagem baseada em equipe em comparação com aprendizagem cooperativa e aprendizagem baseada em problemas. *Journal on Excellence in College Teaching*, 25.
- Moreira, M. A. (1999). *Teorias de aprendizagem*, volume 2. Editora pedagógica e universitária São Paulo.

- Moreira, M. A. (2012). Mapas conceituais e aprendizagem significativa (concept maps and meaningful learning). *Instituto de Física - UFRGS 90501-970 Porto Alegre - RS, Brasil*
- Neto, J. A. d. S. P. (2006). Teoria da aprendizagem significativa de david ausubel: perguntas e respostas. *Série-Estudos-Periódico do Programa de Pós-Graduação em Educação da UCDB*.
- Neves, M., Guerreiro, L., and Moura, A. (2006). Porto Editora.
- Neves, Cátia Djamila dos Santos. (2019). Uma abordagem do estudo da derivada de uma função com aplicação do GeoGebra. *Universidade Aberta*
- Oliveira, GA and Costa, E. (2010). Metodologias ativas: aplicações e vivências em educação farmacêutica. farmacêutica: um relato de experiência. *Associação Brasileira de Ensino Farmacêutico e Bioquímico*.
- Oliveira, B. L. C. A. d., Lima, S. F., Rodrigues, L. d. S., and Pereira Júnior, G. A. (2018). Team-based learning como forma de aprendizagem colaborativa e sala de aula invertida com centralidade nos estudantes no processo ensino- e aprendizagem. *Revista Brasileira de Educação Médica*, 42(4):86–95.
- Paiva, T. Y. (1996). Aprendizagem baseada em problemas: uma mudança de paradigma ou uma moda passageira? *Medical Education Online, Taylor Francis*.
- Paiva, T. Y. (2016). Aprendizagem ativa e colaborativa: uma proposta de uso de metodologias ativas no ensino da matemática.
- Pereira, E. and Guerra, E. A. (2016). A utilização de applets no geogebra para a aprendizagem da trigonometria no ensino médio. *Revista de Educação de Ciências e Matemática*, 7(3):53–72.
- Rocha Cunha, Mariana Lucas e Amendola, Fernanda e Samperiz, Maria Mercedes Fernandez e da Costa Mohallem, Andrea Gomes. (2018). Avaliação da percepção do aluno sobre o método de aprendizagem baseado em equipe (APA-TBL): construção e validação de instrumentos, pages 141–147. *Educação do enfermeiro na prática Elsevier*
- Silva, L. P. d. (2019). Um estudo da atenção seletiva na aprendizagem das funções trigonométricas: etiologias e tipologias de erros na perspectiva da neurociência cognitiva. *Universidade Federal de Sergipe*
- Silveira, A. (2015). O GeoGebra na formação e aprendizagem de transformações geométricas isométricas no plano euclidiano. *Universidade de Aveiro (Portugal)*.
- Silveira, A. and Cabrita, I. (2013). O geogebra como ferramenta de apoio à aprendizagem significativa das transformações geométricas isométricas. *Indagatio Didactica*, 5(1):149–170. Citação (bibtex)

- Silveira, A. and Cabrita, I. (2018). O geogebra como ferramenta de apoio à aprendizagem significativa das transformações geométricas isométricas. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo ISSN 2237-9657*, 7(1)7–30.
- Smith, A. C., Stewart, R., Shields, P., Hayes-Klosteridis, J., Robinson, P., and Yuan, R. (2005). Introductory biology courses: a framework to support active learning in large enrollment introductory science courses. *Cell Biology Education*, 4(2):143–156.
- Stepanova and Jelena. (2018). Aprendizagem baseada em equipe em gestão, pages 141–147. *Cambridge Scholars publicando novo Castle Upon Tyne, Reino Unido*.
- Strobel, J. and Van Barneveld, A. (2009). When is pbl more effective? a meta-synthesis of meta-analyses comparing pbl to conventional classrooms. *Interdisciplinary journal of problem-based learning*, 3(1):4.
- CdM-CV. (2021). Atividades educativas que estimulem o interesse pela Matemática, através das suas aplicações na resolução de problemas do quotidiano. *Universidade de Cabo Verde*. <https://www.unicv.edu.cv/pt/fct/arquivo-fct/2489-campos-da-matematica-gulbenkian-em-cabo-verde>
- Watté, B. H., de Souza, R. R., de Farias, G. F., and de Souza, M. V. (2018). Implementação da metodologia team based learning (tbl) em uma estratégia de blended learning, no desenvolvimento da disciplina de empreendedorismo. *EAD, PBL e o Desafio da Educação em Rede*



# Apêndice A

## Apêndices

### A.1 Atividade 1

A Figura A.1 apresenta uma imagem do quadro da sala onde estamos, em que a diagonal [AC], faz um ângulo  $\alpha$  com parte inferior [AB]. Os lados [AB] e [BC] são medidos pelos alunos, usando fita métrica,

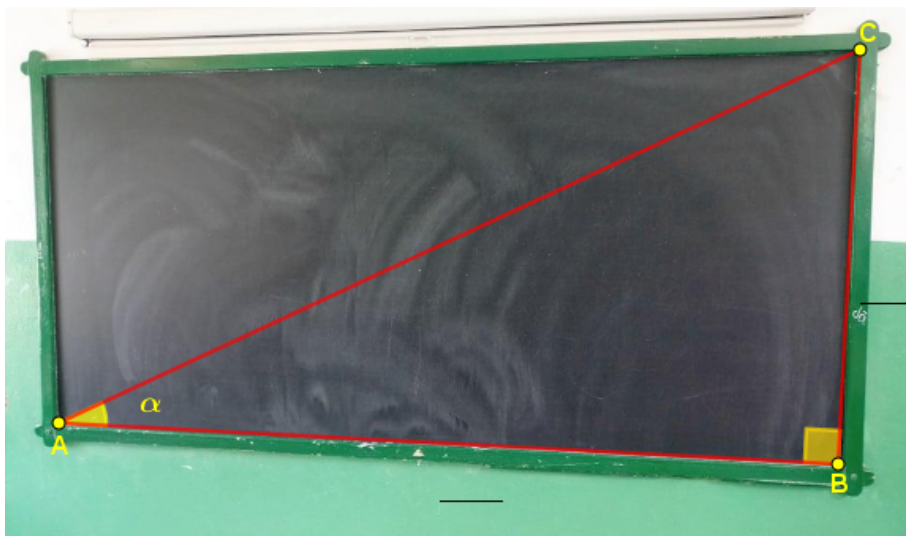


Fig. A.1: Quadro da sala de aula

Usando os valores que obteve, complete:

- a) A diagonal [AC] mede \_\_\_\_
- b) O valor de  $\alpha$  é \_\_\_\_

## A.2 Atividade 2

A Figura A.2 apresenta uma parte do solo da nossa sala de aula, onde os alunos marcaram o triângulo [CDE] e identificaram as medidas dos lados [CE] e [CD], e o ângulo  $\angle DCE$ .

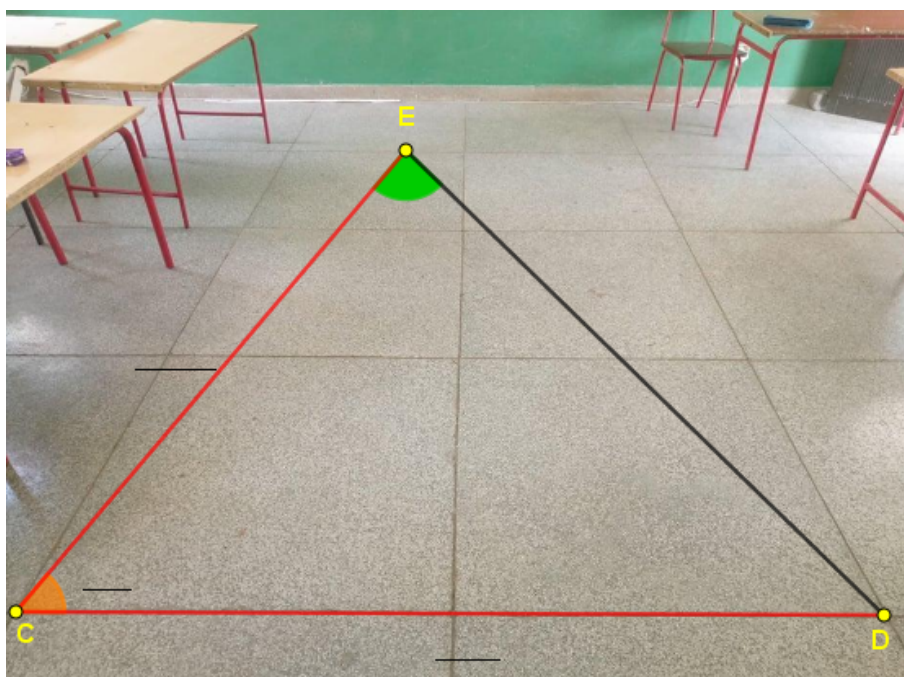


Fig. A.2: Solo da sala de aula

- Determina o comprimento do lado [DE]  
 $\overline{DE} = \underline{\hspace{2cm}}$
- Qual é a amplitude do ângulo formado por lados [DE] e [EC]?  
 $\widehat{DEC} = \underline{\hspace{2cm}}$
- Classifica o triângulo [CDE] quanto aos lados.

### A.3 Atividade 3

Considera que no campo da escola há uma roda gigante na qual o professor está pendurado. Em cada instante  $t$  o professor encontra-se a uma altura (em metros), em relação ao solo, dada pela expressão

$$h(t) = 11,5 + 10 \sin \left[ \frac{\pi}{12} (t - 26) \right]$$

onde o tempo  $t$  é dado em segundos e a amplitude em radianos.



Fig. A.3: Roda gigante

- Determina a altura em que o professor estava quando a roda começou a girar ( $t = 0$ ).
- Determina as alturas mínima e máxima que professor alcança e o tempo gasto em uma volta completa.
- Qual é o tempo gasto em uma volta completa (período) e o que ele representa em termos das alturas?
- Usa o GeoGebra e descreve o que acontece quando se altere o valor de cada um dos parâmetros da expressão da função ( $h(t) = A + B \sin[\omega(t - C)]$ ).

## A.4 Atividade 4

Considera que em 17 de maio 2021, a maré alta na prainha foi à meia noite. A altura de água na prainha é uma função periódica, pois oscila regularmente entre maré alta e baixa. A altura (em metros) é aproximada pela fórmula:

$$y = 5 + 4,9 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right),$$

onde  $t$  é o tempo em horas desde a meia noite de 17 de maio de 2021.



Fig. A.4: Maré no mar da prainha

- Esboce o gráfico da função em 17 de maio de 2021 (para  $t$  a variar entre 0 e 24h).
- Qual era a altura da água na maré alta?
- Quando foi a maré baixa e qual era a altura da água nesse momento?
- Qual é o período desta função e o que ele representa em termos das marés?
- Qual é a amplitude desta função e o que ela representa em termos das marés?
- Usa o GeoGebra e descreve o que acontece quando se altere o valor de cada um dos parâmetros da expressão da função ( $h(t) = A + B \cos(Ct)$ ).





